

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MÉTODO DE INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA
E SISTEMAS PSEUDO-CLÁSSICOS NÃO-RELATIVÍSTICOS

KLEBER CARLOS MUNDIM

tese submetida como requisito parcial
para obtenção do grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

EM

FÍSICA TEÓRICA

ORIENTADOR: José David Manguiera Vianna

Brasília (DF), Novembro de 1982

" Se os meus escritos valem alguma coisa, possam os que os tiverem (...) utilizá-los do melhor modo que entenderem. "

(Descartes)

Aos grandes amigos,

André e Nidia

RESUMO

Revisa-se brevemente, nos capítulos I e II, os conceitos básicos das formulações de Integrais de Trajetória e da Mecânica Pseudo-Clássica.

Desenvolve-se pelo método de Feynman, no capítulo III uma expressão geral para o operador Hamiltoniano quântico, a partir de um sistema clássico geral, não relativístico, incluindo potenciais dependentes da posição e velocidades.

Para os sistemas Pseudo-clássicos, obtêm-se após a quantização, pelo método de Feynman, os mesmos resultados encontrados pelo método canônico de quantização.

Finalmente, ainda no capítulo III, determina-se os propagadores de Feynman para sistemas Pseudo-clássicos G_1 e G_2 e generaliza-se, em seguida, para o caso G_N , quando a Lagrangeana for do tipo $\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{i}{2} \xi_{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \beta_{\alpha} \xi_{\alpha}$

CAPÍTULO I

I - PRINCÍPIO DE FEYNMAN

I.1. Introdução

O conceito de "Integral de Trajetória" foi introduzida por Feynman e publicado em 1948⁽²⁾.

Para ele, o problema consistia em aplicar o princípio de ação mínima à Mecânica Quântica, de tal modo que a Mecânica Clássica pudesse ser obtida naturalmente, como um caso especial de Mecânica Quântica, quando h (constante de Planck) tendesse a zero.

Feynman então, procurou uma conexão entre a formulação da Mecânica Quântica e conceitos clássicos como a Lagrangeana ou em particular, o princípio de Hamilton (Função S). Segundo um trabalho de Dirac⁽¹⁾, no qual este sugeriu que a função exponencial de $i\varepsilon$ vezes a Lagrangeana ($e^{i\varepsilon L}$), poderia ser "análogo a" uma função transformação para a função de onda Ψ da Mecânica Quântica, de tal forma que a função Ψ em um dado instante seria relacionada com a função de onda em um instante posterior (isto é, num intervalo de tempo ε mais tarde) pela multiplicação com a tal exponencial. Feynman analisou a possibilidade da expressão "análogo a" ser substituída por "igual a". Essa análise o conduziu ao uso da exponencial da integral temporal da Lagrangeana ou ação S , como a função transformação para intervalos no tempo, finitos. Mostrando em seguida que a fôr

mulação assim obtida da Mecânica Quântica era equivalente às de Schrödinger e Heisenberg.

Este capítulo tem os seguintes objetivos: introduzir o formalismo de Integral de Trajetória; definir e apresentar as interpretações físicas do propagador de Feynman; como também discutir algumas de suas propriedades. Na secção I.6, como aplicação, calcula-se o propagador K para uma partícula livre. Finalmente, na secção I.7, define-se o propagador K no espaço de fase ressaltando as vantagens com relação ao propagador definido no espaço de configuração.

I.2. Definições e Conceitos Importantes

I.2.1. Princípio da Incerteza

Suponha que um sistema para atingir um estado a partir de um estado dado inicialmente possa fazê-lo por diferentes caminhos. Para saber qual caminho foi seguido é necessário introduzir um aparelho de medida. Mas, em escala microscópica, é impossível separar com todo rigor o objeto (sistema) do instrumento de medida. A intervenção do aparelho de medida, segundo a interpretação usual da Mecânica Quântica, aparece então como uma perturbação incontornável, cujo caráter finito e não nulo deriva diretamente do atomismo da ação. A existência dessa perturbação incontornável põe um limite a esta necessária distinção entre sujeito e objeto, e obriga a uma revisão dos conceitos clássicos sobre a descrição dos fenômenos. Em particular observa-se que a probabilidade do sistema "chegar" ao ou—

tro estado final não é a soma das probabilidades referentes a cada um dos caminhos possíveis, o que sugere então definir o seguinte princípio da incerteza sob a forma⁽³⁾:

"Qualquer processo usado para detectar uma das alternativas possíveis a serem seguidas por um sistema destrói a interferência entre as alternativas".

Esta forma de apresentar o princípio da incerteza, difere da forma apresentada por Heisenberg, a qual poderia ser expressa por como⁽³⁾.

"Ambos, posição e momentum não podem ser medidos, com certeza absoluta, simultaneamente; o produto das incertezas do momentum e da posição relativos a um experimento não pode ser menor do que $\hbar = h/2\pi$, onde h é a constante de Planck".

I.2.2. Amplitude de Probabilidade - Definição

Para introduzir o conceito de amplitude de probabilidade em Mecânica Quântica, consideremos a seguinte "experiência mental":

Suponhamos que uma partícula se propague de uma fonte F situada num ponto "a", até um detector D , no ponto "b". Veja figura I.1. Trataremos o problema, por motivo de simplicidade, bidimensional.

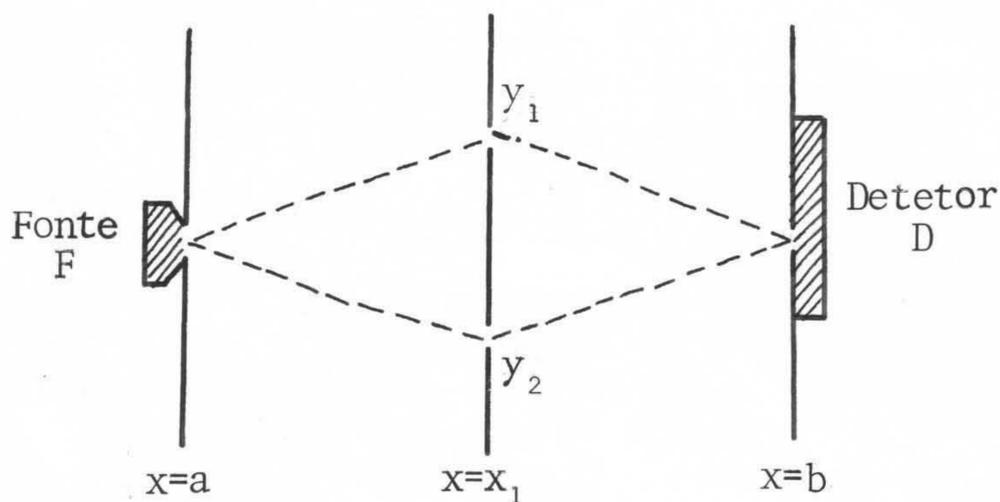


Fig. I.1

Suponhamos então que entre a fonte e o detector existe um anteparo na posição $x = x_1$, com dois furos y_1 e y_2 respectivamente. Como o arranjo experimental não nos permite determinar por qual trajetória a partícula seguirá para chegar até o detector, devemos então, atribuir a cada uma das infinitas trajetórias uma certa probabilidade desta ou aquela acontecer. Em outras palavras, devemos associar a cada alternativa uma certa amplitude de probabilidade, ϕ .

A amplitude de probabilidade total ϕ da partícula sair da fonte F e chegar em um ponto no detector D, será então, a soma das amplitudes associadas a cada alternativa possível. Por exemplo, se a alternativa da partícula passar pela fenda y_1 associarmos a amplitude de probabilidade ϕ_1 e a alternativa desta passar pela fenda y_2 associarmos a amplitude ϕ_2 , a amplitude de probabilidade total ϕ será,

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) \quad (\text{I.1.})$$

Experimentalmente observa-se que a probabilidade da partícula chegar em um ponto qualquer x no detector, é igual ao

quadrado do módulo de ϕ , isto é,

$$P(x) = |\phi|^2 = |\phi_1 + \phi_2|^2 \quad (I.2)$$

e por outro lado,

$$P_1 = |\phi_1|^2, \quad P_2 = |\phi_2|^2 \quad (I.3)$$

são as probabilidades da partícula passar pelas fendas y_1 e y_2 respectivamente.

Comparando (I.2) e (I.3) temos que:

$$P(x) \neq P_1(x) + P_2(x) \quad (I.4)$$

que nos leva a concluir que deve existir uma certa interferência entre as possíveis alternativas. Assim, uma definição mais geral para o termo "amplitude de probabilidade" pode ser,

"Amplitude de probabilidade é a quantidade associada a todos os processos por meio dos quais um evento na natureza pode ocorrer".

I.2.3. O Operador Evolução

Desde que à escala de precisão dos fenômenos quânticos não existe uma clara separação entre sistema e instrumento de observação, a evolução de um sistema quântico deixa de ser estritamente causal desde o momento em que este se encontra sub

metido a uma observação. Pelo contrário, um sistema quântico isolado de toda intervenção exterior evolui de forma exatamente previsível.

Consideremos inicialmente um sistema quântico isolado; isto é, um sistema que não interage com nada salvo quando se efetua uma medida sobre ele.

Seja $|\Psi(t_0)\rangle$ o vetor que representa seu estado dinâmico em um instante t_0 ; dado $|\Psi(t_0)\rangle$, o vetor $|\Psi(t)\rangle$ que representa seu estado no instante posterior t , pode ser segundo a teoria quântica habitual perfeitamente determinado;

- Em primeiro lugar postula-se que a superposição linear dos estados é válida ao longo do tempo. Por conseguinte, a correspondência entre $|\Psi(t_0)\rangle$ e $|\Psi(t)\rangle$ é linear e define um certo operador linear $\hat{U}(t, t_0)$, o qual recebe o nome de operador de evolução:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \quad (\text{I.5})$$

Se o sistema é conservativo, isto é, se sua energia, representada pelo operador Hamiltoniano \hat{H} , não depende explicitamente do tempo, $\hat{U}(t, t_0)$ pode ser definido por:

$$\hat{U}(t, t_0) \hat{=} e^{-\frac{1}{\hbar} \cdot \hat{H}(t-t_0)} \quad (\text{I.6})$$

o qual é solução da equação

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0) \quad (\text{I.7})$$

satisfazendo a condição inicial,

$$\hat{U}(t_0, t_0) \hat{=} \hat{\mathbb{1}} \quad (\text{I.8})$$

Por extensão, admite-se, com toda a generalidade, que o operador $\hat{U}(t, t_0)$ é a solução da equação diferencial (I.7) que satisfaz a condição inicial (I.8), inclusive quando o sistema quântico não é conservativo. Neste último caso, \hat{H} depende explicitamente do tempo e a relação (I.6) para o operador $\hat{U}(t, t_0)$ não é mais válida. Na realidade, no caso em que \hat{H} depende de t não é possível obter uma solução (I.7) sob a forma (I.6). Neste caso, a equação (I.7) e a condição (I.8) podem ser substituídas pela equação integral equivalente,

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H} \hat{U}(t', t_0) dt' \quad (\text{I.9})$$

As equações (I.7), (I.8) e (I.9) expressam a lei fundamental de evolução do sistema quântico. Uma expressão equivalente desta é a equação de Schrödinger ou equação diferencial da evolução dos estados dinâmicos do sistema, ou seja

$$i\hbar \cdot \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (\text{I.10})$$

Usando a conservação da norma de $|\psi(t)\rangle$ no tempo, pode-se mostrar que \hat{U} é um operador unitário,

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \psi(t_0) \rangle \hat{=} \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle \quad (\text{I.11})$$

o que é verdade se

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1} = \hat{U} \hat{U}^\dagger \quad (\text{I.12})$$

ou

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$$

No espaço das configurações, descrito pelas coordenadas $q \hat{=} (q_1, q_2, \dots, q_\ell)$, onde ℓ é o número de graus de liberdade, o sistema é descrito pelo vetor de estado $|q\rangle$ num instante t . A probabilidade de que este esteja entre $|q\rangle$ e $|q+dq\rangle$, no instante t , sendo $|q_0\rangle$ o estado no instante t_0 , é:

$$P(q, q_0; t, t_0) dq \hat{=} |\langle q | \hat{U}(t, t_0) | q_0 \rangle|^2 dq \quad (\text{I.13})$$

A função de onda no espaço das configurações é, por outro lado definida por:

$$\langle q | \Psi \rangle \hat{=} \Psi(q) \quad (\text{I.14})$$

Concluindo essa secção, lembrem que o operador \hat{U} satisfaz a seguinte lei de composição:

$$\hat{U}(t-t_0) = \hat{U}(t, t_{n-1}) \cdot \hat{U}(t_{n-1}, t_{n-2}) \dots \hat{U}(t_1, t_0) \quad (\text{I.15})$$

Para

$$t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_{n-1} < t_N$$

1.2.4. Princípio de Mínima Ação: Definição

Tomemos uma partícula que parte do ponto q_a no instante t_a e chega ao ponto q_b no instante t_b .

Na Mecânica Clássica, em oposição à Mecânica Quântica, existe somente uma específica e particular trajetória para ir de "a" até "b", a assim chamada "trajetória clássica", a qual simbolizamos por $q_{c\ell}(t)$.

Um dos mais elegantes modos de expressar a condição que determina a particular trajetória $q_{c\ell}(t)$, dentre todas as possíveis trajetórias, é o princípio da mínima ação. Isto é, existe uma certa quantidade S a qual pode ser computada para cada trajetória. A trajetória clássica $q_{c\ell}(t)$ é aquela para qual S é um mínimo. Na realidade a condição real é que S seja meramente um extremo, o que é o mesmo que dizer, o valor de S não muda em primeira ordem se a trajetória $q_{c\ell}(t)$ é lentamente modificada.

A quantidade S é dada pela expressão:

$$S \hat{=} \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (I.16)$$

onde L é a Lagrangeana do sistema.

Para determinar a trajetória $q_{c\ell}(t)$, como é sabido, usa-se o cálculo variacional. Supõe-se uma variação na trajetória clássica de uma quantidade $\delta q(t)$, e usa-se a condição de extre

mo fixos,

$$\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0 \quad (I.17)$$

A condição para que $q_{c\ell}(t)$ seja um extremo de S , significa:

$$\delta S = S(q+\delta q) - S(q) = 0 \quad (I.18)$$

em primeira ordem em δq . Usando a definição (I.17), vem que,

$$S(q+\delta q) = \int_{t_a}^{t_b} L(q+\delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt$$

$$\int_{t_a}^{t_b} [L(\dot{q}, q, t) + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta q \frac{\partial L}{\partial q}] dt \quad (I.19)$$

$$\delta S = S(q+\delta q) - S(q) = \int_{t_a}^{t_b} (\delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta q \frac{\partial L}{\partial q}) dt \quad (I.20)$$

Usando a relação,

$$\frac{d}{dt} (\delta q \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta q \cdot \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) \quad (I.21)$$

obtém-se

$$\delta S = \delta q(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \delta q \left[\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] dt \quad (I.22)$$

onde o primeiro termo é nulo, pois δq é fixo nos extremos.

Entre os pontos "a" e "b" $q(t)$ pode assumir qualquer valor arbitrário. Segue que a trajetória para ser um extremo deve satisfazer sempre a condição:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (I.23)$$

A solução desta equação fornece a trajetória clássica, $q(t)$. Essa equação é comumente denominada de "Equação de movimento de Lagrange".

Na Mecânica Quântica, ao contrário da Mecânica Clássica, têm importância tanto a forma da integral de S quanto os valores dos extremos.

I.3. Soma sobre as Trajetórias e Eventos ocorrendo em Sucessão

A melhor forma de apresentar o conceito de integrais de trajetória é a partir do experimento idealizado por Feynman e Hibbs⁽³⁾.

Suponha que uma partícula, um elétron por exemplo, se propague de uma fonte F , situada no ponto "a", a um detector D , situado no ponto "b". Coloquemos entre a fonte e o detector um anteparo opaco na posição x_1 , com dois furos y_1 e y_2 (fig.I.1) Sabemos que, se o arranjo experimental não permite determinar por qual deles o elétron passa, a amplitude de probabilidade para ir de "a" a "b" é a soma das amplitudes de probabilidades para passar por y_1 e y_2 (interferência de caminhos alternativos).

Se colocarmos mais um anteparo na posição x_2 com furos em y_3 e y_4 , temos caminhos possíveis passando por (y_1, y_3) , (y_1, y_4) , (y_2, y_3) e (y_2, y_4) (veja figura I.2) e a amplitude total correspondente à partícula sair de F e chegar em D, deve ser então, igual a superposição das amplitudes correspondentes a cada uma das 4 alternativas possíveis.

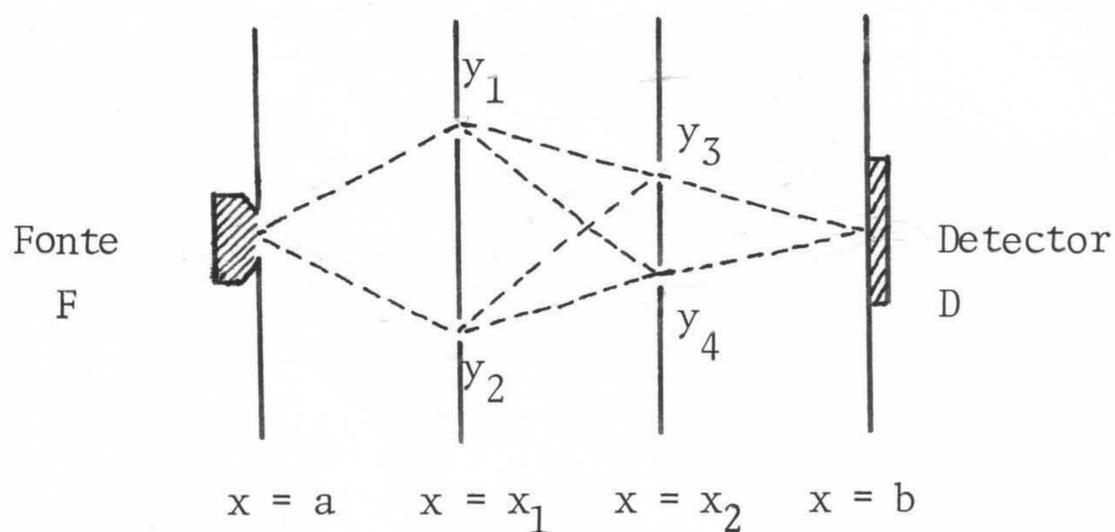


Fig. I.2

Se aumentarmos o número de furos e de anteparos intermediários, conforme figura I.3, o número de caminhos possíveis ou alternativas que interferem aumenta, até que no limite de subdivisões, Fig. I.4, temos de considerar todas as trajetórias possíveis $y(x)$ com extremos fixos. A amplitude será então, a superposição das amplitudes correspondentes a todas as trajetórias possíveis, com extremos fixos em "a" e "b".

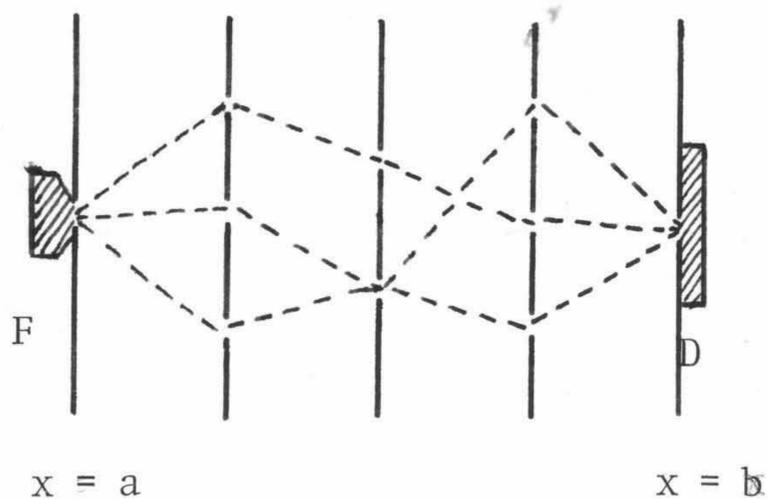


Fig. I.3

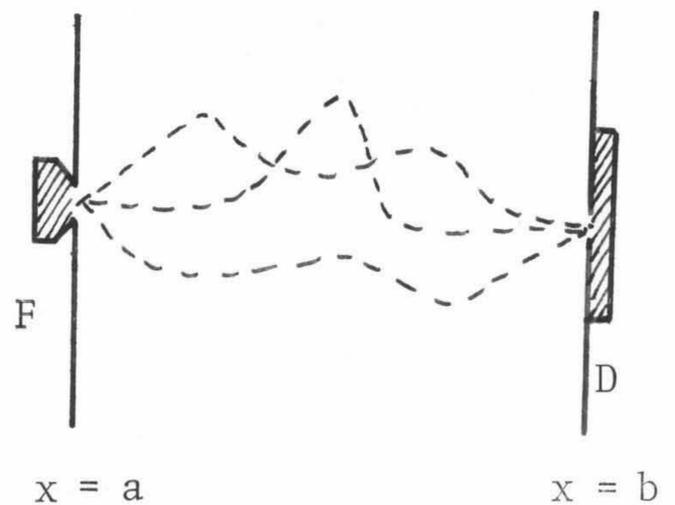


Fig. I.4

Essa idéia de associar a cada trajetória uma certa amplitude de probabilidade é o mesmo que estabelecer pesos a cada alternativa. Como existe na realidade, infinitos caminhos possíveis para ir do ponto "a" ou "b", o que fazemos é somar todas as contribuições devido a cada alternativa. Essa soma, então representa a amplitude da partícula sair de F e chegar em D, sem especificar qual trajetória ela seguiu na realidade.

É bastante intuitivo, que deve existir um certo conjunto de trajetórias com maior peso, isto é, com maior chance de serem a trajetória seguida pela partícula, no caso o elétron. Por outro lado, o elétron pode ser olhado como tendo um comportamento corpuscular, logo de acordo com a Mecânica Clássica, este deve seguir uma trajetória definida. Então, qual será esta trajetória? E quais das infinitas trajetórias estariam contidas no conjunto com maior, probabilidade de acontecerem? Para responder a estas questões, é bastante lembrar o princípio de mínima ação. De acordo com esse princípio, conforme se sabe, o caminho escolhido pelo elétron é aquele cuja ação S é mínima, ou para ser mais exato, um extremo. A esta ação denominaremos ação clássica, S_{cl} . Por outro lado, podemos associar à cada trajetória uma ação S . Assim as trajetórias contidas no conjunto mais provável, serão aquelas cuja ação não diferencie muito da ação clássica.

Já que existe um método para determinar a trajetória clássica, por que não usá-lo? É aí que surge o princípio da incerteza de Heisenberg, o qual estabelece que a posição e o momentum iniciais não podem ser conhecidos com absoluta certeza simultaneamente; em outras palavras, quaisquer valores iniciais,

satisfazendo as relações de incerteza de Heisenberg, para o momentum e posição são possíveis e portanto não é possível determinar o tal caminho clássico.

Em síntese, o que temos a fazer é estudar o problema de um elétron que parte de um ponto "a", fixo, e chega a outro em "b", também fixo. Como existem infinitas trajetórias possíveis, atribuímos a cada uma delas uma amplitude de probabilidade e finalmente somamos as contribuições devido a cada alternativa. Esquemáticamente podemos representar estes resultados por,

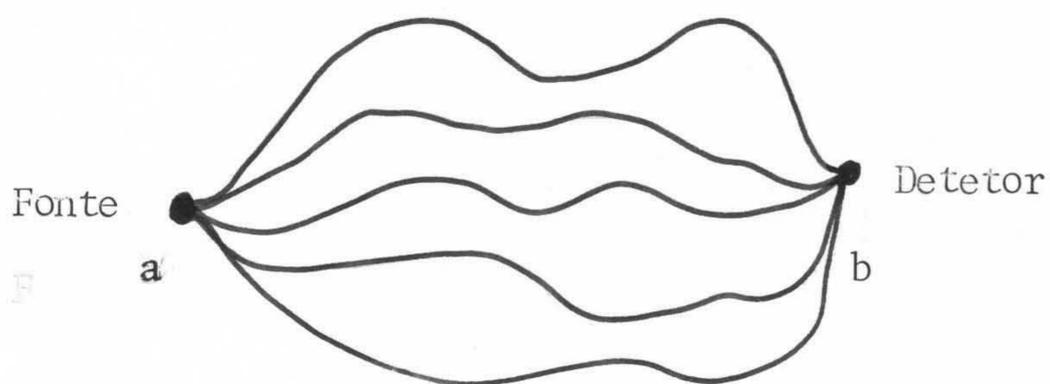


Fig. 1.5

Foi a consideração de tais fatos que nos parece levaram Feynman a introduzir a "Integral de Trajetórias".

Seguindo a idéia de Dirac, Feynman assumiu que as amplitudes de probabilidades ϕ fossem proporcionais a exponencial de i vezes a ação clássica S dividido pela constante de Planck sobre 2π , comumente definida por \hbar , ou seja

$$\phi [q(t)] \sim e^{\frac{iS}{\hbar}} \quad (I.24)$$

A contribuição para a amplitude total, a qual simbolizamos por $K(b,a)$, será a soma das contribuições $\phi[q(t)]$ de cada trajetória,

$$K(b,a) = \sum_{\substack{\text{Sobre todas} \\ \text{as trajetórias}}} \phi[q(t)] \quad (\text{I.25})$$

E para uma distribuição de trajetórias contínua, devemos substituir o somatório por uma integral, isto é,

$$K(b,a) = \int_a^b \phi[q(t)] dq(t) \quad (\text{I.26})$$

sendo que, por definição, a contribuição de cada trajetória tem uma fase proporcional a ação S ,

$$\phi[q(t)] \hat{=} \text{const.} \cdot e^{\frac{iS[q(t)]}{\hbar}} \quad (\text{I.27})$$

A probabilidade, $P(b,a)$ para ir de um ponto q_a no instante t_a a um ponto q_b no instante t_b é então definido como o módulo ao quadrado da amplitude $K(b,a)$, para ir de "a" a "b".

$$P(b,a) \hat{=} |K(b,a)|^2 \quad (\text{I.28})$$

I.4. Integral de Trajetória: Definição

Denotemos por Ω o conjunto de todas as funções diferenciáveis $q(t)$ as quais satisfazem a condição que $q(t_0) = q_0$ e $q(t) = q$. Para cada função em Ω (a qual pode representar obviamente a

trajetória de uma partícula, movendo de q_0 a q no intervalo de tempo t_0 a t) calculamos a ação,

$$S[q(t)] = \int_{t_0}^t L dt$$

A partir da equação (I.26) e (I.28) pode-se definir a seguinte integral funcional,

$$K(q, q_0; t-t_0) = \int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]} dq(t) \quad (I.29)$$

Para definir a integral no espaço das funções, consideremos uma sequência de partições do intervalo $t_0 < t < t$, tal como usado na definição de integral de Riemann. A N -ésima partição é dada pela escolha de $N+1$ pontos: $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N \hat{=} t$. Para N partições consideremos a seguinte função linear do tipo "em pedaços" a qual tem valor q_n em t_n , isto é,

$$q(t) \hat{=} q_{n-1} \left(\frac{t_n - t}{t_n - t_{n-1}} \right) + q_n \left(\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) \quad (I.30)$$

para $q_N \hat{=} q$ e $t_{n-1} \leq t \leq t_n$

Na N -ésima aproximação para a integral funcional, integramos sobre todas funções q_N com uma constante de normalização escolhida tal que K_N aproxime-se de um núcleo (Kernel) unitário. Uma tal constante de normalização é (3)

$$C_N = \prod_{n=1}^N \left[\frac{-im}{2\pi\hbar(t_n - t_{n-1})} \right]^{3/2} = \prod_{n=1}^N C_n \quad (I.31)$$

Então,

(I.32)

$$K(q, q_0; t-t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[\frac{-im}{2 \hbar \pi (t_n - t_{n-1})} \right]^{3/2} \int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]} d^3q_1 d^3q_2 \dots d^3q_{N-1}$$

E definindo

$$Dq(t) \hat{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[\frac{-im}{2 \pi \hbar (t_n - t_{n-1})} \right]^{3/2} \cdot d^3q_1 d^3q_2 \dots d^3q_{N-1} \quad (I.33)$$

temos que,

$$K(q, q_0; t-t_0) = \int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]} \cdot Dq(t) \quad (I.34)$$

Esta integral foi denominada por Feynman de "Integral de Trajetória".

I.4.1. Eventos Ocorrendo em Sucessão

A ação $S(b, a)$ pode ser expressa por uma soma das ações para cada intervalo $q_n - q_{n-1}$, como

$$S(b, a) = S(b, N-1) + S(N-1, N-2) + \dots + S(2, 1) + S(1, a) \quad (I.35)$$

Substituindo este resultado na equação (I.32) obtemos

$$K(q, q_0; t-t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N C_n \int_{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} S(b, N-1)} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S(N-1, N-2)} \dots e^{\frac{i}{\hbar} S(1, a)} \cdot d^3q_1 \dots d^3q_{N-1} \quad (I.36)$$

Definindo ,

$$K(n+1,n) \hat{=} C_n e^{\frac{i}{\hbar} S(N-n-1, N-n)} \quad (\text{I.37})$$

temos que,

$$K(q, q_0; t-t_0) = \int_{\Omega} K(b, N-1) \cdot K(N-1, N-2) \dots K(2, 1) \cdot K(1, a) d^3q_1 \dots d^3q_{N-1} \quad (\text{I.38})$$

Isto significa que podemos olhar a partícula indo de "a" a "b", como se primeiro ela fosse de "a" a $q_1(t)$, depois de $q_1(t)$ a $q_2(t)$, então de $q_2(t)$ a $q_3(t)$, ..., e finalmente de $q_{N-1}(t_{N-1})$ a "b".

Em síntese, temos uma sucessão de eventos ocorrendo no tempo.

I.5. Olhando K como um Propagador

Nas secções anteriores definimos e introduzimos a amplitude de probabilidade K, a qual a partir de agora chamaremos de núcleo propagador ou simplesmente propagador K. Conforme a definição, K representa a amplitude de probabilidade de um sistema partindo de um ponto "a" e chegar a outro "b", por qualquer trajetória ligando "a" a "b". O seu módulo ao quadrado representa a probabilidade de encontrar esse sistema num ponto P do espaço.

O ente K, no entanto pode ter uma outra interpretação:

- Tomemos um sistema que seja descrito no espaço de configuração pelas coordenadas $q \hat{=} (q_1, q_2, \dots, q_\ell)$ onde ℓ é o número de graus de liberdade. Se o sistema estiver no ponto q_0 em $t = t_0$, o que representamos pelo vetor de estado $|q_0\rangle$, a probabilidade de encontrá-lo $|q\rangle$ e $|q+dq\rangle$, no instante t , é

$$P(q, q_0; t) dq = |\langle q | \hat{U}(t-t_0) | q_0 \rangle|^2 dq \quad (I.39)$$

onde $\hat{U}(t-t_0)$ é o operador evolução definido na secção I.2.3. Comparando a equação (I.28) com a (I.39), obtemos, a menos de uma fase constante que:

$$K(q, q_0; t-t_0) = \langle q | \hat{U}(t-t_0) | q_0 \rangle \quad (I.40)$$

Por outro lado a equação (I.5), nos dá

$$| \Psi(t) \rangle \hat{=} \hat{U}(t-t_0) | \Psi(t_0) \rangle, \quad (I.5)$$

ou

$$\langle q | \Psi(t) \rangle = \langle q | \hat{U}(t-t_0) | \Psi(t) \rangle \quad (I.41)$$

E introduzindo o operador $\int |q_0\rangle \langle q_0| dq_0 = \hat{\mathbb{I}}$

$$\langle q | \Psi(t) \rangle = \int \langle q | \hat{U}(t-t_0) | q_0 \rangle \langle q_0 | \Psi(t) \rangle dq_0 \quad (I.42)$$

o que por (I.40) resulta em:

$$\Psi(q, t) = \int K(q, q_0; t-t_0) \cdot \Psi(q_0, t_0) dq_0 \quad (I.43)$$

Este resultado pode ser interpretado fisicamente como: A amplitude de probabilidade total, em (q,t) (isto é, a função de onda $\Psi(q,t)$) é a soma, ou integral sobre todos os possíveis valores de q_0 no ponto (q_0, t_0) (isto é, $\Psi(q_0, t_0)$). Isto significa que os efeitos de toda a história anterior de um sistema físico pode ser expressa em termos de uma única função, ou, dada a função de onda inicial, podemos calcular tudo o que pode acontecer ao sistema após o instante inicial.

I.6. O Propagador para uma Partícula Livre

Com a finalidade de ilustrarmos como obter K , calcularemos o propagador para uma partícula livre (unidimensional)

A Lagrangeana de uma partícula livre é:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad (\text{I.44})$$

O propagador $K(b,a)$ pela definição é:

$$K(b,a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{q_1} \dots \int_{q_{N-1}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_n S_n} dq_1 dq_2 \dots dq_{N-1} C_N^{1/2} \quad (\text{I.45})$$

Para uma partícula livre, a ação S_n pode ser aproximada por,

$$S_n(n, n-1) = \frac{m\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\varepsilon} \right)^2 \quad (\text{I.46})$$

onde $\epsilon \hat{=} t_n - t_{n-1} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$.

Substituindo este resultado na equação (I.45) obtemos,

$$K(b, a) = \int \dots \int e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon} \sum_{n=1}^N (q_n - q_{n-1})^2} \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m}\right)^{-N/2} dq_1 \dots dq_{N-1} \quad (\text{I.47})$$

Usando o fato que a integral de uma gaussiana é também uma gaussiana, podemos calcular a integração por passos, isto é:

i) - Primeiro integra-se em dq_1 , tomando para isso q_0 e q_2 constantes, obtendo-se:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi i \hbar}{m}\right)^{-2/2} \cdot \exp \left\{ \frac{-m}{2i\hbar\epsilon} [(q_2 - q_1)^2 + (q_1 - q_0)^2] \right\} dq_1 \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}\right) \exp \left[\frac{im}{2\hbar\epsilon} (q_0^2 + q_2^2) \right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(aq_1^2 + bq_1)] dq_1 \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

onde temos definido

$$a \hat{=} \frac{m}{\hbar\epsilon}, \quad b \hat{=} \frac{m}{\hbar\epsilon} (q_0 + q_2) \quad (\text{I.49})$$

A integral acima, (I.48), é do tipo de Fresnel⁽²⁰⁾ e seu resultado é, $\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \exp \left[\frac{ib^2}{4a} \right]$, logo

$$I_1 = \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (2\epsilon)} \right]^{1/2} \cdot \exp \left[\frac{m}{2i\hbar(2\epsilon)} (q_2 - q_0)^2 \right] \quad (\text{I.50})$$

ii) o segundo passo é integrar em dq_2 . Então,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{1/2} \cdot \exp \left[\frac{m}{2i \hbar \epsilon} \cdot (q_3 - q_2)^2 \right] \cdot I_1 dq_2 \quad (\text{I.51})$$

Usando um raciocínio análogo ao anterior, encontramos que,

$$I_2 = \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (3\epsilon)} \right]^{1/2} \cdot \exp \left\{ \left[\frac{m}{2i \hbar (3\epsilon)} \right] \cdot (q_3 - q_0)^2 \right\} \quad (\text{I.52})$$

E continuando o processo, após $N-1$ passos encontramos,

$$I_{N-1} = \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (N\epsilon)} \right]^{-1} \cdot \exp \left[\frac{m}{2i \hbar (N\epsilon)} \cdot (q_N - q_0)^2 \right] \quad (\text{I.53})$$

ou

$$K(b, a) = \left(\frac{2\pi i \hbar N\epsilon}{m} \right)^{1/2} \cdot I_{N-1} \quad (\text{I.54})$$

logo

$$K(b, a) = \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right]^{1/2} \cdot \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(q_b - q_a)^2}{t_b - t_a} \right] \quad (\text{I.55})$$

onde usamos $N \cdot \epsilon = t_b - t_a$.

Dessa forma, o propagador $K(b, a)$ para uma partícula livre é dado por (I.55) ou lembrando que $S_{cl}(b, a) = \frac{m}{2} \frac{(q_b - q_a)^2}{t_b - t_a}$,

temos

$$K(b, a) = C e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(b, a)} \quad (\text{I.56})$$

onde

$$C = \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right]^{1/2} \quad (\text{I.57})$$

I.7. O Propagador no Espaço de Fase

Uma das desvantagens do desenvolvimento das integrais de trajetória no espaço de configuração é que elas são definidas a menos de uma constante de normalização. No espaço de fase tal não ocorre. De fato usando as equações (I.38) e (I.40) obtemos,

$$\begin{aligned}
 K(q, q_0; t-t_0) &= \langle q | \hat{U}(t, t_0) | q_0 \rangle \\
 &= \int \dots \int \langle q | \hat{U}(t_N, t_{N-1}) | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | \hat{U}(t_{N-1}, t_{N-2}) | q_{N-2} \rangle \dots \\
 &\quad \dots \langle q_1 | \hat{U}(t_1, t_0) | q_0 \rangle dq_{N-1} dq_{N-2} \dots dq_1 \quad (I.58) \\
 &= \int \dots \int K(N, N-1) K(N-1, N-2) \dots K(1, 0) dq_{N-1} dq_{N-2} \dots dq_1
 \end{aligned}$$

onde

$$\langle q_n | \hat{U}(t_n, t_{n-1}) | q_{n-1} \rangle = \langle q_n | e^{-\frac{1}{\hbar} \hat{H} \delta t_n} | q_{n-1} \rangle \quad (I.59)$$

$$\delta t_n = t_n - t_{n-1}$$

Introduzindo o operador $\int | p_n \rangle \langle p_n | dp_n = \hat{1}$ na equação (I.58),

obtemos:

$$\begin{aligned}
 K(q, q_0; t-t_0) &= \int \dots \int \langle q_N | \hat{U}(\delta t_N) | p_N \rangle \langle p_N | q_{N-1} \rangle \dots \\
 &\quad \dots \langle q_1 | \hat{U}(\delta t_1) | p_1 \rangle \langle p_1 | q_0 \rangle dq_{N-1} \dots dq_1 dp_N \dots dp_1
 \end{aligned}$$

E sendo o propagador para um intervalo de tempo infinitesimal δt_n , definido por,

$$K_n \hat{=} \langle q_n | e^{\frac{-i \cdot \hat{H} \delta t_n}{\hbar}} | p_n \rangle \langle p_n | q_{n-1} \rangle \quad (\text{I.61})$$

tomando-se a expressão da exponencial até primeira ordem em δt , vem que,

$$e^{\frac{-i \cdot \hat{H} \delta t_n}{\hbar}} \hat{=} \hat{\Pi} - \frac{i}{\hbar} \cdot \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) \delta t_n \quad (\text{I.62})$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned} \langle q_n | e^{\frac{-i \cdot \hat{H} \delta t_n}{\hbar}} | p_n \rangle \langle p_n | q_{n-1} \rangle &\hat{=} \langle q_n | \hat{\Pi} - \frac{i}{\hbar} \cdot \hat{H} \delta t_n | p_n \rangle \langle p_n | q_{n-1} \rangle \\ &= [1 - \frac{i}{\hbar} H(p_n, q_n) \delta t_n] \langle q_n | p_n \rangle \langle p_n | q_{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.63})$$

$$\hat{=} \frac{1}{2\pi\hbar} \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_n \delta q_n - \frac{i}{\hbar} H \delta t_n \right] \quad (\text{I.64})$$

para $\delta q_n = q_n - q_{n-1}$ e

$$\langle q_j | p_\ell \rangle = \frac{1}{(2\hbar\pi)^{1/2}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} p_\ell q_j} \quad (\text{I.65})$$

Substituindo a equação (I.64) na (I.60), obtemos a expressão para o propagador no espaço de fase,

$$K(q, q_0, t-t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^N \left(\frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right) \cdot \prod_{n=1}^{N-1} \left(\frac{dq_n}{2\pi\hbar} \right) \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \cdot \sum_{n=1}^N [p_n \delta q_n - H(q_n, \bar{p}_n) \cdot \delta t_n] \right\} \quad (\text{I.66})$$

Para um número infinito de subdivisões, isto é $N \rightarrow \infty$, a somatória pode ser olhada como uma aproximação da integral. (20)

$$K(q, q_0; t-t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^N \left(\frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right) \cdot \prod_{n=1}^{N-1} \left(\frac{dq_n}{2\pi\hbar} \right) \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t [p\dot{q} - H(p, q)] d\tau \right\} \quad (\text{I.67})$$

E definindo-se

$$Dq = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N-1} \left(\frac{dq_n}{2\pi\hbar} \right) \quad ; \quad Dp = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(\frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right) \quad (\text{I.68})$$

podemos então, expressar uma integral de trajetória no espaço de fase, análoga a apresentada na equação (I.34), isto é;

$$K(q, q_0; t-t_0) = \int Dq \cdot Dp \cdot e^{\frac{i}{\hbar} A(q, q_0, t)} \quad (\text{I.69})$$

onde

$$A = \int_{t_0}^t [p\dot{q} - H(p, q)] \cdot d\tau \quad (\text{I.70})$$

Não sendo necessário como dissemos, introduzir constantes de normalização.

CAPÍTULO II

II. MECÂNICA PSEUDO-CLÁSSICA

II.1. Introdução

O estudo em teorias dinâmicas, descritas por Lagrangeanas (ou Hamiltonianas) envolvendo números-C e números anti-comutantes (variáveis de Grassmann), tem mostrado, nestes últimos anos, ser de utilidade em Física teórica: descrição de partículas de Weyl⁽²⁵⁾, modelo supersimétrico da partícula de Dirac⁽⁹⁾,⁽²⁵⁾ são alguns exemplos. Em particular nota-se que as variáveis anticomutantes podem ser as ferramentas adequadas para se obter uma descrição clássica do Spin⁽⁹⁾ e de graus de liberdade internos das partículas elementares⁽¹⁷⁾. Como também, reproduzir o correto espectro quântico após a quantização⁽²²⁾.

Historicamente, os primeiros passos usando variáveis anticomutantes foram dados por J. Schwinger (1951)⁽⁷⁾ seguido por Salam e Matheus (1955)⁽²⁶⁾

A mecânica para sistemas descritos por número-C e números anticomutantes tem sido denominada de Pseudo-clássica⁽⁹⁾. Essa mecânica pode ser considerada como o limite clássico (no sentido $\hbar \rightarrow 0$) de uma teoria quântica geral com operadores de Bose e Fermi; contudo, não existe "a priori" justificativa para esta generalização da mecânica clássica. Na realidade, é na tentativa⁽²¹⁾ de justificar as variáveis ditas microscópicas no limite clássico que se usa uma teoria abstrata construída com variáveis de Grassmann. Nessa formulação, tem-se então a corres—

pondência:

operadores com espectros não limitados $\xrightarrow{\hbar \rightarrow 0}$ variáveis microscópicas = números reais.

operadores com espectros limitados $\xrightarrow{\hbar \rightarrow 0}$ variáveis microscópicas = variáveis de Grassmann

Além dessa motivação, a mecânica pseudo-clássica tem demonstrado ser capaz de descrever de forma satisfatória partículas com spin na presença de campo gravitacional e eletromagnético⁽¹⁵⁾. Contudo, significação maior dessa teoria e sua importância talvez resida no fato que ela pode permitir, que se obtenha um certo conhecimento sobre sistemas que não possuem um análogo clássico no sentido estrito, e assim ela adquire um significado físico completo após ser quantizada.

No presente capítulo apresentamos um resumo da pseudo-mecânica segundo Casalbuoni et al⁽⁹⁾, (21). O Capítulo tem a finalidade de introduzir algumas definições e conceitos e apresentar as álgebras G_1 , G_2 e G_3 .

II.2. Formalismo Canônico na Pseudomecânica

Considere um sistema pseudo-clássico descrito pelas variáveis ordinárias (número-c) q_i ($i=1,2,\dots,n$) e pelas variáveis de Grassmann ξ_μ ($\mu=1,2,\dots,N$).

A Lagrangeana deste sistema, de forma análoga ao caso

clássico, é construída como uma função das variáveis q_i, \dot{q}_i, ξ_μ e $\dot{\xi}_\mu$ isto é,

$$\mathcal{L} \hat{=} \mathcal{L} (q_i, \dot{q}_i; \xi_\mu, \dot{\xi}_\mu)$$

Para que os momenta canonicamente conjugados a ξ_μ sejam ímpares⁽⁹⁾ e portanto anticomutantes com ξ_μ , torna-se necessário que a função Lagrangeana seja par com relação às variáveis de Grassmann.

De forma análoga ao caso clássico, define-se a ação pseudo-clássica por:

$$A \hat{=} \int_{t'}^{t''} \mathcal{L} (q_i, \dot{q}_i; \xi_\mu, \dot{\xi}_\mu) dt \quad (\text{II.1})$$

Como é sabido, a forma mais geral da lei do movimento dos sistemas mecânicos é fornecida pelo princípio de mínima ação. Na presente mecânica tem-se:

— Suponha que o sistema, nos instantes $t = t'$ e $t = t''$ ocupe posições bem determinadas, caracterizadas pelos dois conjuntos de valores das coordenadas $q_1(t'), q_2(t'), \dots, q_n(t'), \xi_1(t'), \xi_2(t'), \dots, \xi_N(t')$ e $q_1(t''), q_2(t''), \dots, q_n(t''), \xi_1(t''), \dots, \xi_N(t'')$. Entre essas posições, o sistema deve evoluir tal que a integral (I.1) seja um extremo, isto é,

$$\delta A = \delta \int_{t'}^{t''} \mathcal{L} (q, \dot{q}; \xi, \dot{\xi}) dt = 0 \quad (\text{II.2})$$

onde temos usado a notação $q \rightarrow q_1, q_2, \dots, q_n$ e $\xi \rightarrow \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$

Assume-se que os extremos $q(t'), \xi(t')$ e $q(t''), \xi(t'')$ são fixos, isto é,

$$\delta q(t') = \delta q(t'') = 0 \quad ; \quad \delta \xi(t') = \delta \xi(t'') = 0 \quad (\text{II.3})$$

Assim, (Veja Apêndice A)

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta \int_{t'}^{t''} \mathcal{L}(q, \dot{q}; \xi, \dot{\xi}) dt \\ &= \int_{t'}^{t''} \left(\delta q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \delta \xi_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\mu} + \delta \dot{\xi}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_\mu} \right) dt \\ &= \left(\delta q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \delta \xi_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_\mu} \right) \Big|_{t'}^{t''} + \int_{t'}^{t''} \delta q_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) dt + \\ &\quad + \int_{t'}^{t''} \delta \xi_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_\mu} \right) dt \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

O primeiro termo, do lado direito da igualdade, se anula pelas condições (II.3). Como as integrais devem ser nulas para quaisquer valores de δq_i e $\delta \xi_\mu$, os integrandos devem necessariamente se anular, isto é,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (\text{II.5a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\mu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_\mu} \right) = 0 \quad (\text{II.5b})$$

com

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$u = 1, 2, \dots, N$$

Definindo,

$$p^i \hat{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad ; \quad \pi^\mu \hat{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_\mu} \quad (\text{II.6})$$

temos que, pelas equações (II.5),

$$\dot{p}^i \hat{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad ; \quad \dot{\pi}^\mu \hat{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\mu} \quad (\text{II.7})$$

Define-se também o Hamiltonia pseudo-clássico como,

$$\mathcal{H} \hat{=} \dot{q}_i p^i + \dot{\xi}_\mu \pi^\mu - \mathcal{L} \quad (\text{II.8})$$

Ficando subentendido a soma nos índices repetidos. Verifica-se dessa definição que \mathcal{H} é par nas variáveis de Grassmann. Calculando a variação em \mathcal{H} , pela equação (II.8), obtém-se

$$\delta \mathcal{H} = -\delta q_i \dot{p}^i + \delta p^i \dot{q}_i - \delta \xi_\mu \dot{\pi}^\mu - \delta \pi^\mu \dot{\xi}_\mu$$

Por outro lado, sendo \mathcal{H} uma função de q_i , p_i , ξ_μ e π_μ , pode-se escrever

$$\delta \mathcal{H} = \delta q_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \delta p_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \delta \xi_\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_\mu} + \delta \pi_\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu}$$

Comparando as duas últimas equações, tem-se então:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{\xi}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu} \quad (\text{II.9a})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad ; \quad \dot{\pi}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_\mu} \quad (\text{II.9b})$$

as quais são denominadas de equações de Hamilton.

Seja $\mathcal{F}(q, p; \xi, \pi, t)$ uma função das coordenadas $q(t)$, $\xi(t)$, dos momenta $p(t)$, $\pi(t)$ e do tempo. A sua derivada total com relação ao tempo vem dado por:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \left(\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} \right) + \left(\dot{\xi}_\mu \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_\mu} + \dot{\pi}_\mu \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi_\mu} \right) \quad (\text{II.10})$$

Usando as relações (II.9) a e b, segue que,

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_\mu} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_\mu} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi_\mu} \right) \quad (\text{II.10})$$

Define-se então, de forma análoga ao caso clássico, o parêntese de Poisson para a mecânica pseudo-clássica; para \mathcal{F} e \mathcal{H} , por:

$$\{F, H\} \hat{=} \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial p^i} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^\mu} \cdot \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} + \frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} \cdot \frac{\partial F}{\partial \pi^\mu} \right) \quad (\text{II.12})$$

Assim a derivada total da função F pode ser escrita como,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \quad , \quad (\text{I.13})$$

notando-se no entanto que segundo se tenha variáveis dinâmicas pares ou ímpares, nas variáveis de Grassmann, os parênteses de Poisson são definidos diferentemente.

Pode-se mostrar que os parênteses de Poisson⁽²²⁾, têm as seguintes propriedades

$$\text{i) } \{f, g\} = - \eta_{fg} \{g, f\}$$

$$\text{ii) } \{f, c\} = 0 \quad (c \text{ é um número-}c) \quad (\text{II.14})$$

$$\text{iii) } \{f, g+h\} = \{f, g\} + \{f, h\}$$

$$\text{iv) } \{f, gh\} = \{f, g\}h + \eta_{fg} \cdot g\{f, h\}$$

$$\text{v) } \eta_{hf} \{f, \{g, h\}\} + \eta_{fg} \{g, \{h, f\}\} + \eta_{gh} \{h, \{f, g\}\} = 0$$

onde

$\eta_{fg} = -1$ se f, g são ambas ímpares nas variáveis de Grassmann

$\eta_{fg} = 1$ em todos os outros casos.

Então, em todos os casos,

$$fg = \eta_{fg} \cdot gf \quad (\text{II.15})$$

É interessante ressaltar, que a álgebra dos parênteses de Poisson da mecânica pseudo-clássica, é uma álgebra de Lie graduada⁽²³⁾.

II.3. Algumas Aplicações

Nesta seção discutem-se alguns exemplos de Lagrangeanas pseudo-clássicas (caso não relativístico), para sistemas descritos por até 3 geradores de uma álgebra de Grassmann isto é, G_1 , G_2 e G_3 . Sugere-se também uma forma geral para a Lagrangeana de sistemas pseudo-clássicos descritos por N geradores (G_N); contudo, nota-se que dos casos G_1 , G_2 e G_3 o de maior interesse em física é o G_3 , devido a sua relação com o problema de uma partícula não relativística com Spin, em um campo magnético externo⁽¹¹⁾.

II.3.1. Caso **a** um gerador: $G_1 = G_1\{\bar{\xi}\}$

Para sistemas pseudo-clássicos descritos por um único gerador a Lagrangeana mais geral tem a forma:

$$\mathcal{L} \hat{=} \frac{i}{2} \bar{\xi} \dot{\xi} + i\eta \bar{\xi} + \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V(q) \quad (\text{II.16})$$

onde η é de caráter ímpar. Neste caso, não existe acoplamento entre as variáveis Bosônicas e Fermiônicas.

É interessante discutir o caso de um sistema descrito somente pelo gerador da álgebra de Grassmann (ξ), cuja Lagrangeana deve ser:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \xi \dot{\xi} + i\eta \xi \quad (\text{II.17})$$

e a Hamiltoniana,

$$\mathcal{H} = \eta \left(\pi - \frac{1}{2} \xi \right) \quad (\text{II.18})$$

Sendo π o momento conjugado a ξ .

Das equações de movimento de Lagrange, apresentadas na seção anterior (equação II.5), obtém-se que,

$$\dot{\xi} = \eta \quad (\text{II.19})$$

Este caso é denominado por Oscilador de Fermi, e pode-se interpretar η como a frequência de oscilação do sistema.

II.3.2. Caso a dois geradores: $G_2 = G_2\{\xi_1, \xi_2\}$

Se o sistema é descrito por dois geradores ξ_1 e ξ_2 , a forma mais geral para a Lagrangeana é,

$$\mathcal{L} \hat{=} \frac{1}{2} \xi_\mu \dot{\xi}^\mu - \frac{i}{2} (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1) V(q) + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V_0(q) \quad (\text{II.20})$$

com $\mu = 1, 2$. Usa-se aqui soma nos índices repetidos.

Casalbuoni⁽⁹⁾ discute, como aplicação Física deste caso, a quantização de Bohr e Sommerfeld, encontrando para a "integral de fase" J o valor,

$$J = \frac{2\pi}{\omega} E_n = nh \quad (\text{II.21})$$

onde h é a constante de Planck e n um inteiro. Isto daria

$$E_n = nh\omega \quad (\text{II.22})$$

sendo o ω a frequência de oscilação e n podendo assumir dois valores somente 0 e 1.

Das equações de movimento de Lagrange (eq. II.5), obtém-se

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 V(q) \quad (\text{II.23})$$

$$\dot{\xi}_2 = -\xi_1 V(q) \quad (\text{II.24})$$

$$\ddot{q}_k + \frac{i}{2m} (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1) \cdot \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial V_0}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{II.25})$$

II.3.3. Caso a três geradores: $G_3 = G_3 \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$

Sendo o sistema descrito pelas variáveis de Grassmann ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 a forma mais geral para a Lagrangeana é:

$$\frac{i}{2} \xi_\mu \dot{\xi}^\mu + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V_1(q) - \xi_\mu \xi_\nu V^{\mu\nu}(q) \quad (\text{II.26})$$

$$\mu\nu = 1, 2, 3$$

As equações de movimento são,

$$\dot{\xi}^\mu - \xi_\alpha V^{\mu\alpha} + \xi_\beta V^{\beta\mu} = 0 \quad (\text{II.27})$$

$$\ddot{q}_k + \frac{i}{m} \xi^\mu \xi^\nu \frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial q_k} + \frac{\partial V_1}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{II.28})$$

onde $\mu, \nu = 1, 2, 3$. Na primeira equação de movimento a permutação nos índices gregos, são anti-cíclicos.

Marinov et Berezin⁽¹¹⁾, considerando $\Lambda^\mu = -\frac{1}{2} \xi^{\mu\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$ com $\mu, \alpha, \beta = 1, 2, 3$, encontraram como um possível Hamiltoniano para o caso G_3 ,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p_k p^k + V_0(q) + (L_\mu \Lambda^\mu) V_1(q) + \Lambda_\mu \Gamma^\mu(q) \quad (\text{II.29})$$

$$k = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad \mu = 1, 2, 3$$

onde $L_\mu = \xi_{\mu\nu\eta} q^\nu p^\eta = (\vec{q} \times \vec{p})_\mu$ é o momento angular orbital, $V_0(q)$ e $V_1(q)$ são funções potencial e $\Gamma^\mu(q)$ é o campo vetorial. A relação de com o caso de uma partícula não relativística com Spin em um campo externo é aparente se identificarmos Λ^μ com "momentum angular" associado aos graus de liberdade representados por ξ_α , $\alpha = 1, 2, 3$. Nesse caso $(L_\mu \Lambda^\mu) V_1(q)$ adquire o significado de interação Spin-órbita.

Para um sistema descrito por N geradores de Grassmann a Lagrangeana, em sua forma mais geral, pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^N \xi_{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i^2 + V(q_i, \xi_{\alpha}) \quad (\text{II.30})$$

sendo $V(q_i, \xi_{\alpha})$ construída a partir de combinação linear de todos os polinômios possíveis nas variáveis ξ_{α} como também, deve conter funções nas variáveis comutantes q_i .

No capítulo seguinte quantizaremos os casos de sistemas descritos G_1 e G_3 , e determinamos explicitamente o propagador associado a G_2 , usando o princípio de Feynman na forma modificada isto é; descrito num superespaço de fase definido por $(q(t), (\xi(t))$ e $(p(t), \pi(t))$. A integral de trajetória definida em termos de uma Hamiltoniana permite simplificar os cálculos de integração, já que em termos da Lagrangeana contendo variáveis anticomutantes não se obtém integrais na forma gaussiana (convencional).

CAPÍTULO III

III. QUANTIZAÇÃO DE SISTEMAS CLÁSSICO GERAL E PSEUDO-CLÁSSICO.

III.1. Introdução

No Capítulo I apresentamos como obter pelo método de Feynman o propagador para o caso mais simples, o de uma partícula livre clássica. O método de Feynman ou integrais de trajetória pode também ser utilizado para determinar-se o operador Hamiltoniano \hat{H} a partir das funções Lagrangeana ou Hamiltoniana clássicas.

A utilização deste método na determinação de \hat{H} permite obter um operador já simetrizado e elimina assim ambiguidades conhecidas do método canônico usual de quantização.

No entanto, no estudo de sistemas clássicos o método de Feynman tem sido aplicado comumente apenas a certos tipos particulares de Lagrangeana, e nos sistemas pseudo-clássicos, a obtenção do \hat{H} tem sido obtido, no melhor do nosso conhecimento, somente via método canônico de quantização.

No presente capítulo nós obtemos \hat{H} , pelo método de Feynman, para um sistema clássico dinâmico geral incluindo potenciais que dependem não só da posição (caso já estudado) mas também das velocidades. Também nesse capítulo procuramos estender o método de Feynman ao super-espço de fase descrito pelos pares canonicamente conjugados (q_i, p_i) e (ξ_α, π_α) onde ξ_α e π_α são elementos da álgebra de Grassmann e determinar \hat{H} e propagadores para sistemas associados às álgebras G_1, G_2 e G_3 . Uma bre

ve discussão sobre álgebra de Grassmann é apresentada nos Apêndices A e B.

III.2. Quantização pelo princípio de Feynman para um sistema clássico não relativístico dependente da posição e velocidade

Consideremos um sistema clássico descrito pela Lagrangeana:

$$L(q(t), \dot{q}(t), t) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + V(q(t), \dot{q}(t)) \quad (\text{III.1.})$$

onde g_{ij} é a métrica e $i, j = 1, 2, \dots, m$

Seja a ação clássica,

$$S = (q(t+\epsilon), q(t)) = \int_t^{t+\epsilon} L(\dot{q}(t'), q(t')) dt' \quad (\text{III.2})$$

com as condições

$$q(t') \Big|_{t'=t} = q(t) \quad , \quad q(t') \Big|_{t'=t+\epsilon} = q(t+\epsilon) \quad (\text{III.3})$$

Por definição de integral de trajetória (vide (I.34))

$$\Psi(q(t+\epsilon), t+\epsilon) = \int e^{\frac{i}{\hbar} S} \Psi(q(t), t) \sqrt{g}(q) D(q(t)) \quad (\text{I.34})$$

onde incluímos o fator \sqrt{g} , $g = \det g_{ij}$.

Para ϵ próximo de zero, na vizinhança do ponto estacionário $q(t) = q(t+\epsilon)$, a ação (III.2) torna-se aproximadamente igual a ϵL , ou seja,

$$S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\epsilon} L(q(t'+\epsilon), q(t')) dt$$

$$\cong \epsilon L \left(\frac{q(t+\epsilon) + q(t)}{2}, \frac{q(t+\epsilon) - q(t)}{\epsilon} \right) \quad (\text{III.4})$$

Então de (I.34) segue que

$$\Psi(q(t+\epsilon), t+\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \epsilon L \left(\frac{q(t+\epsilon) + q(t)}{2}, \frac{q(t+\epsilon) - q(t)}{\epsilon} \right) \sqrt{g(q)} \Psi(q(t)) D(q(t)) \right]$$

$$(\text{III.5})$$

Expandindo o lado esquerdo, dessa igualdade, em série de potências com relação ao tempo, obtemos:

$$\Psi(q(t+\epsilon), t+\epsilon) = \Psi(q(t+\epsilon), t) + \epsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \dots \quad (\text{III.6})$$

Supondo a métrica constante, temos, expandindo as funções do lado direito de (III.5) que:

$$S(q(t+\epsilon), q(t)) = \epsilon L$$

$$= \epsilon \left(\frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + V \right)$$

$$= \frac{1}{2\epsilon} g_{ij} \eta^i \eta^j - \epsilon \left(V_0 - \eta^i \Lambda_i + \frac{1}{2} \eta^i \eta^j \Lambda_{ij} - \frac{1}{6} \eta^i \eta^j \eta^m \Lambda_{ijm} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4!} \eta^i \eta^j \eta^m \eta^n \Lambda_{ijmn} + \dots \right) \quad (\text{III.7})$$

onde,

$$\eta^i = q^i(t+\epsilon) - q^i(t) \quad (\text{III.8})$$

$$\Lambda_i = \frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i}$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j} + \frac{2}{\epsilon} \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \quad (\text{III.9})$$

a expansão da função exponencial é igual,

$$e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon L} = 1 + \frac{i}{\hbar} \cdot \epsilon L + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \epsilon^2 L^2 + \dots \quad (\text{III.10})$$

e

$$\psi = \psi(q(t+\epsilon), t) - \eta^i \frac{\partial \psi}{\partial q^i} + \frac{1}{2!} \eta^i \eta^j \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^i \partial q^j} + \dots \quad (\text{III.11})$$

Substituindo as equações (III.7), (III.10) e (III.11) em (III.5) e resolvendo as integrais Gaussianas, ou seja,

$$\text{a) } \int e^{\frac{i}{2\hbar\epsilon} g_{ij} \eta^i \eta^j} \cdot \sqrt{g} d\eta = (i\hbar\pi\epsilon)^{N/2} \quad (\text{III.12})$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} \int e^{\frac{i}{2\hbar\epsilon} g_{ij} \eta^i \eta^j} \cdot \eta^m \eta^n \sqrt{g} d\eta^m d\eta^n = (i\hbar\pi\epsilon)^{N/2} \cdot \left(\frac{i\hbar\epsilon}{2}\right) g^{mn} \quad (\text{III.13})$$

obtemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\varepsilon L}{\hbar}} \sqrt{g} D(q(t)) = \psi + \left[\frac{\hbar}{2} \frac{i}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^j}) - \frac{iV_0}{\hbar} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j} - \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial V}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{i}{2\hbar} g^{ij} \frac{\partial V}{\partial q^i} \frac{\partial V}{\partial q^j} \right] \varepsilon \psi + \dots$$

(III.14)

Comparando os coeficientes dos monômios em ε , nas equações (III.6) e (III.14), obtemos para o termo ε^1 a equação de Schrödinger, cujo Hamiltoniano \hat{H} vem dado por;

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^j}) + V_0 - \frac{i\hbar}{2} g^{ij} \frac{\partial V}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j} - \\ - \frac{i\hbar}{2} g^{ij} \frac{\partial V}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial V}{\partial q^i} \frac{\partial V}{\partial q^j}$$

(III.15)

onde $V_0 = V(q, \dot{q}, t) \Big|_{\dot{q} = 0}$

É interessante ressaltar que se a métrica não é constante isto é, $g_{ij} = g_{ij}(q)$ surgem termos adicionais no operador Hamiltoniano \hat{H} proporcional à curvatura do espaço R.

A seguir faremos uma aplicação da equação (III.15) para um sistema de uma partícula, na presença de um campo vetorial externo.

III.2.1. Aplicação: Equação de Schrödinger para uma partícula carregada, na presença de um campo magnético.

Seja um sistema clássico contendo uma partícula carregada na presença de um campo magnético, descrito pela Lagrangeana,

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \vec{A} - e\phi \quad (\text{III.16})$$

onde $\dot{\mathbf{r}}$ é o vetor velocidade, e é a carga, c é a velocidade da luz e \vec{A} e ϕ são os potenciais vetorial e escalar, respectivamente.

Assim o operador Hamiltoniano \hat{H} vem dado,

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{-\hbar^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} \cdot (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^j}) + V_0 - \frac{i\hbar}{2} g^{ij} \cdot \frac{\partial V}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} - \\ & - \frac{i}{2} \hbar g^{ij} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i} \cdot \frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{1}{2} g^{ij} \cdot \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i} \cdot \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \end{aligned}$$

onde, $V = \frac{-e}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \vec{A} + e\phi$, $V_0 = e\phi$

Assim, para uma partícula de massa m , usando o sistema de coordenadas cartesianas, obtemos;

$$\frac{i\hbar}{2} g^{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} = \frac{i\hbar}{2} \cdot g^{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \cdot \left(\frac{-e}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \vec{A} + e\phi \right) = -\frac{i\hbar e}{2cm} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

(III.17)

$$\frac{i\hbar}{2} \cdot g^{ij} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i} \cdot \frac{\partial}{\partial q^j} = \frac{i\hbar}{2} g^{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(-\frac{e}{c} \dot{r} \cdot \vec{A} + e\phi \right) \frac{\partial}{\partial q^j} = -\frac{i\hbar e}{2mc} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \quad (\text{III.18})$$

$$\frac{1}{2} g^{ij} \cdot \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i} \cdot \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} = \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A} \cdot \vec{A} \quad (\text{III.19})$$

Substituindo as equações (III.17), (III.18) e (III.19) no operador Hamiltoniano, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + e\phi + \frac{i\hbar e}{2mc} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{i\hbar e}{2mc} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A} \cdot \vec{A} \\ &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + e\phi \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

De onde obtemos a seguinte equação de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \Psi + e\phi \Psi \quad (\text{III.21})$$

III.3. Quantização de Sistemas Pseudo-Clássicos pelo Método de Feynman

Seja um sistema descrito por m coordenadas número- c , q_1, q_2, \dots, q_m e M coordenadas anticomutantes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$ e seus respectivos momenta conjugados p_1, p_2, \dots, p_m e $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_M$ sendo ξ_α e π_α elementos da álgebra de Grassmann.

Segundo Casalbuoni^{(9), (11)} o espaço de fase associado a esse sistema e chamado de superespaço de fase, é descrito pelos pares canonicamente conjugados (q_i, p_i) e (ξ_α, π_α) . Define-

se então um Hamiltoniano $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i; \xi_\alpha, \pi_\alpha; t)$ e tem-se o seguinte princípio variacional:

"Sejam as coordenadas do sistema nos instantes t' e t'' dadas por $(q_1', q_2', \dots, q_m'; \xi_1', \xi_2', \dots, \xi_M')$ e $(q_1'', q_2'', \dots, q_m''; \xi_1'', \xi_2'', \dots, \xi_M'')$ respectivamente e $[q(t), \xi(t); p(t), \pi(t)]$ o conjunto de todas as trajetórias no superespaço de fase que satisfazem as condições inicial (instante t') e final (instante t'') sem nenhuma restrição à energia ou aos momentos inicial ou final. então, o conjunto das trajetórias no superespaço de fase que tornam a ação

$$A = \int_{t'}^{t''} \left[\sum_{i=1}^m \dot{q}_i p_i + \sum_{\alpha=1}^M \frac{i}{2} \dot{\xi}_\alpha \pi_\alpha - \mathcal{H}(p(t), q(t); \pi(t), \xi(t); t) \right] dt \quad (\text{III.22})$$

um extremo é solução das equações de movimento do sistema (equações de Hamilton) para as condições inicial e final especificadas".

Para estendermos o Método de Feynman ao superespaço de fase, definiremos segundo Garrad⁽²⁷⁾ e por analogia com o caso clássico, uma função integral sobre o conjunto de todas as trajetórias possíveis no superespaço de fase, subdividindo o intervalo de tempo $t' < t < t''$ em N partições. As funções $q(t)$, $\xi(t)$ são então aproximadas por funções lineares em cada intervalo (t_{i-1}, t_i) e as funções $p(t)$ e $\pi(t)$ são, no mesmo intervalo, aproximadamente constantes mas descontínuas.

Assim temos com o funcional,

$$\mathcal{F} [q(t), p(t); \xi(t), \pi(t)] = e^{\left[\frac{i}{\hbar} A\right]} \quad (\text{III.23})$$

que o propagador de Feynman $K(q'', q'; \xi'', \xi'; t'', t')$ é dado por

$$K(q'', q'; \xi'', \xi'; t'', t') = \int \exp \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\sum_{j=1}^m \dot{q}_j p_j + \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^M \dot{\xi}_\alpha \pi_\alpha - \mathcal{H}(q, p; \xi, \pi; t) \right] dt \times d[q(t)] \cdot d[p(t)] \cdot d[\pi(t)] \cdot d[\xi(t)] \times \frac{1}{c}$$

(III.24)

onde os símbolos $d[]$ indicam integração sobre todas as trajetórias no superespaço de fase e c é uma constante de normalização a determinar.

III.3.1. Sistemas descrito por $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(q, \xi)$

Neste caso (III.24) nos dá considerando $n=M=3$,

$$K(q'', q'; \xi'', \xi'; t'' - t') = \frac{1}{c} \int_{t'}^{t''} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\dot{\vec{q}} \cdot \vec{p} + \frac{i}{2} \dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{\pi} - \frac{1}{2m} \vec{p} \cdot \vec{p} - V(q, \xi)] dt \right\} \cdot d[p(t)] \cdot d[q(t)] \cdot d[\pi(t)] \cdot d[\xi(t)] \quad (\text{III.25})$$

$$\text{com } \dot{\vec{q}} \cdot \vec{p} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i p_i$$

$$\dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{\pi} = \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\xi}_\alpha \pi_\alpha \quad (\text{III.26})$$

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = \sum_{i=1}^3 p_i p_i$$

Efetuada as N subdivisões do intervalo $t''-t'$, a ação como definida por (III.22) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{t'}^{t''} [\dot{\vec{q}} \cdot \vec{p} + \frac{i}{2} \dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{\pi} - \frac{1}{2m} \vec{p} \cdot \vec{p} - V(q, \xi)] dt \\
 &\cong \sum_{j=1}^N [(\vec{q}_j - \vec{q}_{j-1}) \cdot \vec{p}_j - \frac{1}{2m} (t_j - t_{j-1}) p^2 + \frac{i}{2} (\vec{\xi}_j - \vec{\xi}_{j-1}) \cdot \vec{\pi}_j - \\
 &\quad - \int_{t_{j-1}}^{t_j} V dt] \tag{III.27}
 \end{aligned}$$

e o propagador torna-se:

$$\begin{aligned}
 K(q'', q'; \xi'', \xi'; t''-t') &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N [(\vec{q}_j - \vec{q}_{j-1}) \cdot \vec{p}_j - \frac{1}{2m} p^2 \cdot \right. \\
 &\quad \left. (t_j - t_{j-1}) + \frac{i}{2} (\vec{\xi}_j - \vec{\xi}_{j-1}) \cdot \vec{\pi}_j - \int_{t_{j-1}}^{t_j} V dt] \right\} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\xi
 \end{aligned} \tag{III.28}$$

onde

$$\mathcal{D}q = d^3 q_1 d^3 q_2 \dots d^3 q_N, \quad \mathcal{D}p = d^3 p_1 d^3 p_2 \dots d^3 p_N$$

$$\mathcal{D}\xi = d^3 \xi_1 d^3 \xi_2 \dots d^3 \xi_N, \quad \mathcal{D}\pi = d^3 \pi_1 d^3 \pi_2 \dots d^3 \pi_N$$

(III.29)

A determinação da equação de Schrödinger no superes-

paço é obtida supondo que quando $\Delta t = t'' - t'$ é suficientemente pequeno pode-se aproximar a integral funcional pela sua aproximação de primeira ordem, isto é $\vec{q}'' = \vec{q}_j$ e $\vec{q}' = \vec{q}_{j-1}$. É claro que tal suposição deve ser válida se a integral funcional convergir quando $N \rightarrow \infty$, o que é verdade para uma ampla classe de potenciais.

Então,

$$K(q'', q'; \xi'', \xi'; \Delta t) = \frac{1}{c} \int \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} [\vec{p} \cdot (\vec{q}'' - \vec{q}') - \frac{1}{2m} p^2 \Delta t + \frac{i}{2\pi} \cdot (\vec{\xi}'' - \vec{\xi}') + V_{\Delta t}] \right\} \cdot d^3 p d^3 \pi \quad (\text{III.30})$$

Expandindo a exponencial em série de potências, e desprezando termos de ordem superior ou igual a $(\Delta t)^2$ e finalmente integrando termos de ordem superior ou igual a $(\Delta t)^2$ e finalmente, integrando em $q(t)$ e $\xi(t)$, obtemos

$$K(q'', q'; \xi'', \xi'; \Delta t) = \int \left[1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t \left(\frac{1}{2m} p^2 + V \right) \right] \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\vec{p} \cdot (\vec{q}'' - \vec{q}') + \frac{i}{2} \vec{\pi} \cdot (\vec{\xi}'' - \vec{\xi}')] \right\} \cdot d^3 p d^3 \pi$$

onde na forma mais geral, a função potencial é,

$$V(q, \xi) = V_0(\vec{q}) + V_1(q) \cdot \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi_{\alpha} + V_2(q) \cdot \sum_{\alpha, \beta} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} + V_3(q) \cdot \sum_{\alpha, \beta, \sigma} \gamma_{\alpha\beta\sigma} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \xi_{\sigma} \quad (\text{III.32})$$

Usando então as relações

$$\frac{\partial}{\partial q_j} e^{\frac{i\vec{p}\cdot\vec{q}}{\hbar}} = \frac{i}{\hbar} p_j e^{\frac{i\vec{p}\cdot\vec{q}}{\hbar}} \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{III.33})$$

temos que

$$K(q'', q'; \xi'', \xi'; \Delta t) = \frac{1}{c} \int e^{\frac{i\vec{p}\cdot(\vec{q}''-\vec{q}')}{\hbar}} \cdot e^{\frac{-1}{2\hbar} \vec{\pi}\cdot(\vec{\xi}''-\vec{\xi}')} d^3 p d^3 \pi -$$

$$- \frac{i}{\hbar c} \Delta t \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(q, \xi) \right] \int e^{\frac{i\vec{p}\cdot(\vec{q}''-q')}{\hbar}} \cdot e^{\frac{-1}{2\hbar} \vec{\pi}\cdot(\vec{\xi}''-\vec{\xi}')} d^3 p d^3 \pi$$

(III.34)

Com o uso da função delta de Dirac

$$\int e^{\frac{i\vec{p}\cdot(\vec{q}''-\vec{q}')}{\hbar}} d^3 p = \delta \left[\frac{1}{\hbar} (\vec{q}''-\vec{q}') \right] =$$

$$= \frac{1}{\hbar^3} \delta(q''_1 - q'_1) \delta(q''_2 - q'_2) \delta(q''_3 - q'_3) \quad (\text{III.35})$$

e definindo a sua análoga para as variáveis anticomutantes como, (veja apêndice B)

$$\int e^{\frac{-1}{\hbar} (\vec{\xi}''-\vec{\xi}')\cdot\vec{\pi}} d^3 \pi \hat{=} \delta \left[\frac{1}{\hbar} (\xi''-\xi') \right]$$

$$= \frac{1}{\hbar^3} \cdot \delta(\xi''_1 - \xi'_1) \delta(\xi''_2 - \xi'_2) \delta(\xi''_3 - \xi'_3) \quad (\text{III.36})$$

Obtemos,

$$K(q'', q'; \xi'', \xi'; \Delta t) = \delta(\vec{q}'' - \vec{q}') \cdot \delta(\vec{\xi}'' - \vec{\xi}') -$$

$$- \Delta t \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(q, \xi) \right] \cdot \delta(\vec{q}'' - \vec{q}') \cdot \delta(\vec{\xi}'' - \vec{\xi}') \quad (\text{III.37})$$

onde temos usado a constante $c = (2\hbar)^{-3}$

Expandindo em série de potências de t o lado esquerdo da igualdade acima, para $\Delta t \rightarrow 0$, e observando que neste caso o propagador K deve ter a forma de uma função delta, temos que

(III.38)

$$K(q'', q'; \xi'', \xi'; \Delta t) = \delta(\vec{q}'' - \vec{q}') \cdot \delta(\vec{\xi}'' - \vec{\xi}') + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} K(q, \xi, t) \Big|_{q''=q', \xi''=\xi', \Delta t}$$

Comparando as equações (III.37) e (III.38) obtém-se facilmente a equação de Schrödinger e consequentemente o operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, do sistema quântico correspondente, ou seja

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(q, \xi) \quad (\text{III.39})$$

Devemos notar que como a parte cinética de \mathcal{H} não contém contribuição das variáveis de Grassmann, o mesmo ocorre em $\hat{\mathcal{H}}$.

III.3.2. Sistema descrito por $\mathcal{L} = \frac{i}{2} \xi \dot{\xi} + i\eta \xi$: Caso G_1

Determinando-se o momentum canonicamente conjugado a ξ encontramos que

$$\pi = \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{i}{2} \xi \quad (\text{III.39})$$

o que nos dá o vínculo

$$X = \pi + \frac{i}{2} \xi \quad (\text{III.40})$$

Usamos a notação derivada à esquerda $\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \xi}} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ (veja Apêndice A)

Essa situação é análoga ao de Lagrangeanas degeneradas da mecânica clássica. Utilizando então a formulação de Dirac para o superespaço de fase⁽¹⁹⁾, temos a Hamiltoniana pseudo-clássica.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= \lambda \chi - \xi \pi + \\ &= \lambda \chi - i \eta \xi \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

onde o multiplicador de Lagrange λ (anticomutante de caráter ímpar) é determinado usando que

$$\dot{\chi} = \{ \chi, \mathcal{H}_D \} = 0 \quad (\text{III.42})$$

Com $\{ \chi, \mathcal{H}_D \}$ o parênteses de Poisson da pseudo-mecânica para o caso de uma variável dinâmica ímpar e uma par na álgebra de Grassmann, ou seja

$$\{X, \mathcal{H}_D\} = - \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial \mathcal{H}_D}{\partial \pi} + \frac{\partial \mathcal{H}_D}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \pi} \right) \quad (\text{III.43})$$

Então de (III.40) e (III.42) segue com (III.43) que

$$\lambda = + \eta \quad (\text{III.44})$$

e daí

$$\mathcal{H}_D = \eta \left(\pi - \frac{i}{2} \xi \right) \quad (\text{III.41.a})$$

Para determinar o operador Hamiltoniano associado ao sistema G_1 , usando o método de Feynman temos, desprezando termos da ordem ε^2 , que

$$\begin{aligned} K(\xi'', \xi'; \pi'', \pi'; t'', t') &= \iint e^{i\varepsilon \left[\frac{\xi'' - \xi'}{\varepsilon} - \eta \left(\pi - \frac{i}{2} \xi \right) \right]} d\xi d\pi \\ &= \int (1 - \varepsilon \eta \pi + \frac{\varepsilon i}{2} \eta \xi) \cdot e^{i(\xi'' - \xi') \pi} d\pi \\ &= \int (1 - \varepsilon \eta i \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon i \eta \xi}{2}) \cdot e^{i(\xi'' - \xi') \pi} d\pi \\ &= \delta(\xi'' - \xi') + \varepsilon \left(i \eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{i \eta \xi}{2} \right) \cdot \delta(\xi'' - \xi') \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Expandindo o lado esquerdo de expressão em série de potências em t , obtemos

$$K(\xi'', \xi'; \pi'', \pi'; \varepsilon) = \delta(\xi'' - \xi') + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} K \Big|_{\xi'' - \xi', \pi'' - \pi', \varepsilon} \quad (\text{III.46})$$

pois para $\epsilon \cong 0$ o propagador comporta-se como uma função delta.

Comparando os termos da ordem de ϵ nas duas equações acima encontramos o seguinte operador Hamiltoniano,

$$\hat{\mathcal{H}} = i\eta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \hat{\xi} \right) \quad (\text{III.47})$$

que coincide com o resultado de Casalbuoni e Bordi⁽¹⁹⁾ obtido pelo método canônico de quantização.

Notemos por comparação com \mathcal{H}_D dado por (III.41.a) que para as variáveis de Grassmann tem-se a regra de correspondência:

$$\hat{\pi} \Psi(\xi) = -i\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi(\xi) \quad (\text{III.48})$$

$$\hat{\xi} \Psi(\xi) = \xi \Psi(\xi)$$

III.3.3. Caso $G_3 - (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

Considerando o superespaço de fase consistindo dos sub-espacos hexa-dimensionais (q_i, p_i) e (ξ_α, π_α) , Marinov et Berezin⁽¹¹⁾ obtiveram o Hamiltoniano apresentado na secção 3 do Capítulo II. Procuremos quantizar o sistema descrito por aquele . A ação que o descreve é,

$$A = \int_{t'}^{t''} \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} + \frac{i}{2} \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{\xi}} - \frac{p^2}{2m} - V_0(q) - V_1(q) \vec{L} \cdot \vec{\Lambda} - \vec{r} \cdot \vec{\Lambda} \right] dt \quad (\text{III.49})$$

onde \vec{L} é o momento angular orbital, $V_0(q)$ e $V_1(q)$ são funções potencial e $\vec{\Gamma}(q)$ é um campo vetorial.

Usando a equação (III.49) o propagador K pode ser expresso por

$$\begin{aligned}
 K(q'', q'; \xi'', \xi'; \Delta t) &= \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} + \frac{i}{2} \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{\xi}} - \frac{p^2}{2m} - V_0(q) - \right. \\
 &\quad \left. - V_1(q) (\vec{L} \cdot \vec{\Lambda}) - \vec{\Gamma}(q) \cdot \vec{\Lambda}] \right\} \cdot d^3 q d^3 p d^3 \pi d^3 \xi \\
 &\cong \int [1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t (\frac{p^2}{2m} + V_0 + \frac{i}{2} V_1 \epsilon^{\lambda mn} \epsilon^{\lambda rs} q_m p_n \xi_r \xi_s + i \epsilon^{\lambda mn} \Gamma_\lambda \xi_m \xi_n)] \\
 &\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{q}'' - \vec{q}') \cdot \vec{p}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} (\xi'' - \xi') \cdot \vec{\pi}} d^3 p d^3 \pi \\
 &= \delta(\vec{q}'' - \vec{q}') \cdot \delta(\xi'' - \xi') - \frac{i}{\hbar} \Delta t \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0 + V_1 \frac{\hbar}{2} \cdot \epsilon^{\lambda mn} \epsilon^{\lambda rs} q_m \frac{\partial}{\partial q_n} \xi_r \xi_s + \right. \\
 &\quad \left. + i \epsilon^{\lambda mn} \Gamma_\lambda \xi_m \xi_n \right) \cdot \delta(\vec{q}'' - \vec{q}') \cdot \delta(\xi'' - \xi') \tag{III.50}
 \end{aligned}$$

E introduzindo as definições

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \tag{III.51}$$

$$\hat{L}^j = (\hat{\vec{q}} \times \hat{\vec{p}})^j = \epsilon^{jmn} q_m \frac{\partial}{\partial q_n} \tag{III.52}$$

$$\hat{\Lambda}^j = -\frac{i}{2} \epsilon^{jrs} \hat{\xi}_r \hat{\xi}_s \tag{III.53}$$

Sendo $\hat{\xi}_r$ elementos da álgebra de Clifford

$$K(q'', q'; \xi'', \xi', t'' - t') = \delta(\vec{q}'' - \vec{q}') \delta(\xi'' - \xi') - \Delta t \frac{i}{\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0 + \right. \\ \left. + \frac{\hbar}{2} V_1 \hat{L} \cdot \hat{\Lambda} + \hbar \hat{P} \cdot \hat{\Lambda} \right) \delta(\vec{q}'' - \vec{q}') \delta(\xi'' - \xi') \quad (\text{III.54})$$

Expandindo o lado esquerdo da igualdade acima, em série de potências em t , obtém-se facilmente a equação de Schrödinger e conseqüentemente o operador Hamiltoniano,

$$\mathcal{H} = \hat{H} + \sum_n \frac{\hbar}{2} V_1 \hat{L}_n \hat{\Lambda}_n + \sum_n \hat{P}_n \hat{\Lambda}_n \quad (\text{III.55})$$

onde temos definido por \hat{H} o operador Hamiltoniano.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0(q) \quad (\text{III.55a})$$

Lembrando que as matrizes de Pauli $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ satisfazem as relações $[\hat{\sigma}_m, \hat{\sigma}_n]_+ = 2\delta_{mn}$, uma possível realização de $\hat{\xi}_n$ é

$$\hat{\xi}_n = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \hat{\sigma}_n \quad (\text{III.56})$$

o que permite relacionar o operador Hamiltoniano (III.54) com de uma partícula não relativística com spin em um campo externo, representado por \vec{P} .

III.4. Cálculo dos Propagadores

Caso G_2 : (ξ_1, ξ_2)

Como já ressaltamos no capítulo I (sec. 5), o propagador K assume uma posição fundamental na descrição da evolução de um sistema físico. Mais explicitamente, significa que os efeitos de toda a história de um sistema físico pode ser expressa com K a partir de uma única função, ou seja dada a função de onda inicial, podemos calcular (com a ajuda do propagador) tudo que pode acontecer ao sistema após o instante inicial.

Concluindo esse capítulo, completando o estudo de sistemas pseudo-clássicos descritos pelas álgebras G_1, G_2, G_3 , determinaremos explicitamente o propagador para um sistema descrito pelo modelo G_2 .

Uma possível Lagrangeana para um sistema descrito por dois geradores da álgebra de Grassmann é da forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \cdot (\xi_1 \dot{\xi}_1 + \xi_2 \dot{\xi}_2) + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 \quad (\text{III.57})$$

Sendo β_i "fontes externas" de caráter ímpar na álgebra de Grassmann.

Por definição dos momenta canonicamente conjugados temos os vínculos,

$$\chi_\alpha = \pi_\alpha + \frac{i}{2} \xi_\alpha = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{III.58})$$

Usando então a formulação de Dirac para sistemas pseudo-clássicos temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{\alpha} \chi_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 \xi_{\alpha} \pi_{\alpha} - \mathcal{L} \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{\alpha} \chi_{\alpha} + \xi_1 \beta_1 + \xi_2 \beta_2 \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

E determinando λ_{α} a partir de ⁽¹⁹⁾:

$$\dot{\chi}_{\alpha} = \{ \chi_{\alpha}, \mathcal{H}_D \} = - \sum_{\mu=1}^2 \left(\frac{\partial \chi_{\alpha}}{\partial \xi_{\mu}} \frac{\partial \mathcal{H}_D}{\partial \pi_{\mu}} + \frac{\partial \mathcal{H}_D}{\partial \xi_{\mu}} \frac{\partial \chi_{\alpha}}{\partial \pi_{\mu}} \right) = 0 \quad (\text{III.60})$$

temos a solução geral

$$\lambda_{\alpha} = - i \beta_{\alpha} \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{III.61})$$

Substituindo esse resultado em \mathcal{H}_D segue-se que,

$$\mathcal{H}_D = - i \beta_1 \left(\pi_1 - \frac{1}{2} \xi_1 \right) - i \beta_2 \left(\pi_2 - \frac{1}{2} \xi_2 \right) \quad (\text{III.62})$$

Tendo \mathcal{H}_D , podemos usar a definição de propagador para o caso G_2 , ou seja,

$$K (\xi_2'', \xi_1'', t''; \xi_2', \xi_1', t') = \int_{\xi_{\alpha}'}^{\xi_{\alpha}''} e^{\frac{i}{\hbar} A} \mathcal{D} (\xi_{\alpha}, \pi_{\alpha}) \quad (\text{III.63})$$

onde A é a ação pseudo-clássica expressa em termos das variáveis de Grassmann, ou seja,

$$A = - \sum_{\alpha=1}^2 \pi_{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha} - \mathcal{H}_D \quad (\text{III.64})$$

Com \mathcal{H}_D o Hamiltoniano de Dirac dado por (III.62) segue que

$$A = - \sum_{\alpha=1}^2 \pi_{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha} - i \cdot \sum_{\alpha=1}^2 \beta_{\alpha} \cdot \left(\pi_{\alpha} - \frac{1}{2} \xi_{\alpha} \right) \quad (\text{III.65})$$

Subdividindo o intervalo de tempo $t''-t'$ de evolução do sistema, em $N+1$ partições, tal que $t_n - t_{n-1} = \epsilon$ seja aproximadamente igual a zero, obtemos de (III.63)

$$K(\xi''_1, \xi''_2; \xi'_1, \xi'_2, t''-t') = \lim_{\rightarrow \infty} \int \dots \int \exp\left\{ i\epsilon \sum_{n=1}^{N+1} \dots \right\} .$$

$$\left[\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\xi_{\alpha n} - \xi_{\alpha n-1}}{\epsilon} \pi_{\alpha n} - i \sum_{\alpha=1}^2 \beta_{\alpha} \left(\pi_{\alpha n} - \frac{1}{2} \xi_{\alpha n} \right) \right] .$$

$$\prod_{n=1}^N \frac{d\pi_{1n} d\xi_{1n}}{i} \frac{d\pi_{1N+1}}{i} \cdot \prod_{n=1}^N \frac{d\pi_{2n} d\xi_{2n}}{i} \frac{d\pi_{2N+1}}{i}$$

$$\cong \int \dots \int \exp \left\{ i\epsilon \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{\xi_{1n} - \xi_{1n-1}}{\epsilon} \pi_{1n} + \frac{\xi_{2n} - \xi_{2n-2}}{\epsilon} \pi_{2n} - \right. \right.$$

$$\left. - i\beta_1 \pi_{1n} - \frac{1}{2} \beta_1 \xi_{1n} - i\beta_2 \pi_{2n} - \frac{1}{2} \beta_2 \xi_{2n} \right] \right\} \cdot \prod_{n=1}^N \frac{d\pi_{1n} d\xi_{1n}}{i} \frac{d\pi_{1N+1}}{i} .$$

$$\cdot \prod_{n=1}^N \frac{d\pi_{2n} d\xi_{2n}}{i} \cdot \frac{d\pi_{2N+1}}{i}$$

$$= \int \dots \int \exp \left[i\epsilon \sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{\xi_{1n} - \xi_{1n-1}}{\epsilon} \pi_{1n} - i\beta_1 \pi_{1n} - \frac{1}{2} \beta_1 \xi_{1n} \right) \right] .$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{n=1}^N \frac{d\pi_{1n} d\xi_{1n}}{i} \frac{d\pi_{1N+1}}{i} \\
& \times \int \dots \int \exp \left[i\epsilon \cdot \sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{\xi_{2n} - \xi_{2n-1}}{\epsilon} \pi_{2n} - i\beta_2 \pi_{2n} - \frac{1}{2} \beta_2 \xi_{2n} \right) \right] \times \\
& \times \prod_{n=1}^N \frac{d\pi_{2n} d\xi_{2n}}{i} \frac{d\pi_{2N+1}}{i} \tag{III.66}
\end{aligned}$$

Uma discussão sobre integrações nas variáveis de Grassmann é apresentada no Apêndice A.

Observando a equação acima notamos que cada conjunto de $N+1$ integrais isto é em ξ_{1n} e ξ_{2n} são idênticas ao caso G_1 .

Resolvendo as $2(N+1)$ integrais de forma análoga ao caso de um único gerador obtemos,

$$\begin{aligned}
& \int \dots \int \exp \left[i\epsilon \cdot \sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{\xi_{1n} - \xi_{1n-1}}{\epsilon} \pi_{1n} - i\beta_1 \pi_{1n} - \frac{1}{2} \beta_1 \xi_{1n} \right) \right] \cdot \\
& \cdot \prod_{n=1}^N \frac{d\pi_{1n} d\xi_{1n}}{i} \frac{d\pi_{1N+1}}{i} = \\
& = [\xi_1'' - \xi_1' - i(N+1)\epsilon\beta_1 + \frac{i}{2}(N+1)\epsilon\beta_1 \xi_1'' \xi_1'] \tag{III.67}
\end{aligned}$$

a qual simbolizamos por,

$$K(\xi_1'', \xi_1', t'' - t') \hat{=} [\xi_1'' - \xi_1' - i(N+1)\epsilon\beta_1 + \frac{i}{2}(N+1)\epsilon\beta_1 \xi_1'' \xi_1'] \tag{III.68}$$

onde $\xi'_\alpha = \xi_{\alpha 0}$, $\xi''_\alpha = \xi_{\alpha N+1}$

Para a variável ξ_2 , obtemos também de forma análoga ao caso G_1 que,

$$\int \dots \int \exp \left[i \varepsilon \sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{\xi_{2n} - \xi_{2n-1}}{\varepsilon} \pi_{2n} - i \beta_2 \pi_{2n} - \frac{1}{2} \beta_2 \xi_{2n} \right) \right]$$

$$\prod_{n=1}^N \frac{d\pi_{2n} d\xi_{2n}}{i} \cdot \frac{d\pi_{2N+1}}{i} =$$

$$= [\xi''_2 - \xi'_2 - i(N+1)\varepsilon\beta_2 + \frac{i}{2}(N+1)\varepsilon\beta_2 \xi''_2 \xi'_2] \quad (\text{III.69}).$$

ou (III.70)

$$K(\xi''_2, \xi'_2; t''-t') \hat{=} [\xi''_2 - \xi'_2 - i(N+1)\varepsilon\beta_2 + \frac{i}{2}(N+1)\varepsilon\beta_2 \xi''_2 \xi'_2]$$

Observando as equações (III.67) e (III.70) notamos que estas são exatamente os propagadores para as variáveis ξ_1 e ξ_2 , respectivamente. Então o propagador para um sistema quântico correspondente cuja Lagrangeana é da forma (III.57), pode ser expresso pelo produto dos propagadores nas variáveis ξ_1 e ξ_2 , isto é,

$$K(\xi''_1, \xi''_2, \xi'_1, \xi'_2, t''-t') = K(\xi''_1, \xi'_1, t''-t') \cdot K(\xi''_2, \xi'_2, t''-t') \quad (\text{III.71})$$

De onde podemos generalizar que para um sistema pseudo-clássico descrito por N geradores $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ cuja Lagrangeana é da forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \cdot \sum_{\alpha=1}^N \xi_{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \beta_{\alpha} \xi_{\alpha} \quad (\text{III.72})$$

o propagador de Feynmann pode ser expresso como sendo o produto dos propagadores nas variáveis ξ_{α} , isto é

$$K(\xi_1'', \xi_2'', \dots, \xi_N''; \xi_1', \xi_2', \dots, \xi_N'; t''-t') = \quad (\text{III.73})$$

$$= K(\xi_1'', \xi_1', t''-t') \cdot K(\xi_2'', \xi_2', t''-t') \dots K(\xi_N'', \xi_N', t''-t')$$

É interessante ressaltar que os propagadores $K(\xi_{\alpha}'', \xi_{\alpha}', t''-t')$ podem ser escritos na forma exponencial, como

$$K(\xi_{\alpha}'', \xi_{\alpha}', t''-t') = \xi_{\alpha}'' - \xi_{\alpha}' - i\beta_{\alpha}(t''-t') e^{-\frac{1}{2} \xi_{\alpha}'' \cdot \xi_{\alpha}'} \quad (\text{III.74})$$

onde $t'' - t' = (N+1)\epsilon$

Com o uso desses propagadores podemos então escrever que,

$$\Psi(\xi_1'', \xi_2'', \dots, \xi_N'', t'') \hat{=} \int K(\xi_1'', \xi_2'', \dots, \xi_N''; \xi_1', \xi_2', \dots, \xi_N'; t''-t')$$

$$\Psi(\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_N', t') \cdot d\xi_1' d\xi_2' \dots d\xi_N'$$

Sendo $\Psi(\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_N', t')$ o estado físico do sistema para o instante t' .

APÊNDICE A

Álgebra de Grassmann

Define-se por álgebra de Grassmann G_N , de grau N , a álgebra gerada por N geradores $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ os quais satisfazem a seguinte regra de anticomutação,

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} \hat{=} \xi_\alpha \xi_\beta + \xi_\beta \xi_\alpha = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$$

Em particular,

$$\xi_\alpha^2 = \xi_\alpha \xi_\alpha = 0 \quad (\text{A.2})$$

Qualquer elemento $\mathcal{F}(\xi) \in G_N$ pode ser representado como uma soma finita de monômios homogêneos,

$$\mathcal{F}(\xi) = \sum_{\nu=0}^N \cdot \sum_K g_\nu^{K_1 \dots K_\nu} \xi_{K_1} \xi_{K_2} \quad (\text{A.3})$$

onde $g_\nu^{\{K\}}$ são números reais ou complexos antissimétricos nos índices $\{K\}$. O monômio $\xi_{K_1} \dots \xi_{K_\nu}$ é dito ser de grau ν . A dimensão da álgebra G_N é

$$\dim G_N = \sum_{\nu=0}^N \dim G_N^{(\nu)} = \sum_{\nu=0}^N \binom{N}{\nu} = 2^N \quad (\text{A.4})$$

onde dimensão de $G_N^{(\nu)}$ é o espaço dos monômios de grau ν .

O espaço G_N pode ser subdividido em dois sub-espacos:

; $G_N^{(+)}$ e $G_N^{(-)}$

- $G_N^{(+)}$ é o sub-espaco de G_N , cujos elementos são formados a partir de uma combinação dos monômios de potências pares, isto é,

$$\mathcal{F}(\xi) = \mathcal{F}_0 + \sum_i \mathcal{F}_2^{(\nu_1, \nu_2)} \xi_{\nu_1} \xi_{\nu_2} + \dots \quad (\text{A.5})$$

- $G_N^{(-)}$ é o sub-espaco de G_N , com elementos formados a partir de uma combinação dos monômios de potência ímpares,

$$\mathcal{G}(\xi) = \sum_{\nu} \mathcal{G}_1^{(\nu)} \xi_{\nu} + \sum_i \mathcal{G}_3^{(\nu_1, \nu_2, \nu_3)} \xi_{\nu_1} \xi_{\nu_2} \xi_{\nu_3} + \dots \quad (\text{A.6})$$

Dessas definições observa-se que todos elementos de $G_N^{(+)}$ comutam entre si e também com todos os de G_N , por outro lado, os elementos de $G_N^{(-)}$, anticomutam entre si e comutam com os de $G_N^{(+)}$

Se atribuir as paridades

pares $\longrightarrow 0$

ímpares $\longrightarrow 1$

temos que o produto de dois elementos \mathcal{F} e \mathcal{G} , cujas paridades são dadas por p e q , respectivamente, é igual a

$$\mathcal{F}\mathcal{G} = (-1)^{pq} \mathcal{G}\mathcal{F} \quad (\text{A.7})$$

esta expressão define uma álgebra denominada "Algebra Graduada"

- "Involução": (Um análogo a conjugação complexa).

A involução em G_N é definida como uma correspondência um a um, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ de G_N em G_N , e satisfazendo as seguintes condições:

$$(\mathcal{F}^*)^* = \mathcal{F} \quad (\text{A.8.a})$$

$$(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)^* = \mathcal{F}_1^* + \mathcal{F}_2^* \quad (\text{A.8.b})$$

$$(\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2)^* = \mathcal{F}_2^* \mathcal{F}_1^* \quad (\text{A.8.c})$$

$$(\alpha \mathcal{F})^* = \bar{\alpha} \mathcal{F}^* \quad (\text{A.8.d})$$

onde $\bar{\alpha}$ é um número complexo, isto é complexo conjugado de α . Se $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$ diz-se que o elemento é real. Se todos elementos de G satisfazem esta combinação dizemos que a álgebra é real.

- "Operadores Derivada":

Define-se aqui também os operadores derivativos.

a) derivada à direita: $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\alpha}$

$$\begin{aligned} \xi_{v_1} \xi_{v_2} \dots \xi_{v_l} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\alpha} &= \delta_{v_l \alpha} \xi_{v_1} \dots \xi_{v_{l-1}} - \delta_{v_{l-1} \alpha} \xi_{v_1} \dots \xi_{v_{l-2}} \xi_{v_l} + \\ &+ \dots + (-1)^l \delta_{v_1 \alpha} \xi_{v_2} \dots \xi_{v_l} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

b) derivada à esquerda: $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\alpha}$

$$\begin{aligned} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\alpha} \xi_{v_1} \xi_{v_2} \cdots \xi_{v_l} &= \delta_{v_1 \alpha} \xi_{v_2} \cdots \xi_{v_l} - \delta_{v_2 \alpha} \xi_{v_1} \cdots \xi_{v_l} + \cdots + \\ &+ (-1)^l \delta_{v_l \alpha} \xi_{v_1} \cdots \xi_{v_{l-1}} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

- "Regra de Diferenciação em Cadeia"

Seja,

$$\theta_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} \xi_\beta \quad (\text{A.11})$$

e

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}[\theta(\xi)] \quad (\text{A.12})$$

logo,

$$\mathcal{F}[\theta(\xi)] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\beta} = \sum_\alpha \left(\mathcal{F}(\theta) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha} \right) \cdot a_{\alpha\beta} \quad (\text{A.13})$$

e à esquerda,

$$\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\beta} \mathcal{F}[\theta(\xi)] = \sum_\alpha \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha} \mathcal{F}(\theta) \right) \cdot a_{\alpha\beta} \quad (\text{A.14})$$

se

$$\theta_\alpha(t) = \sum_\beta a_{\alpha\beta}(t) \cdot \xi_\beta \quad (\text{A.15})$$

onde t é um parâmetro real, temos que:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}[\theta(t)] = \sum_\alpha \frac{d\theta_\alpha}{dt} \cdot \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha} \mathcal{F} \quad (\text{A.16})$$

$$= \sum_{\alpha} \left(\mathcal{F} \frac{\delta}{\partial \theta_{\alpha}} \right) \frac{d\theta_{\alpha}}{dt} \quad (\text{A.16})$$

- "Integração":

Define-se as seguintes integrais,

$$\int 1 d\xi_{\alpha} = 0 \quad , \quad \int \xi_{\alpha} d\xi_{\alpha} = 1 \quad (\text{A.17})$$

e

$$\int \xi_{\nu_1} \dots \xi_{\nu_{\alpha}} \cdot d\xi_1 \dots d\xi_{\alpha} = \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_{\alpha}} \quad (\text{A.18})$$

$$\int \mathcal{F}(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_{\alpha} = \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_{\alpha}} g_{\alpha}^{\nu_1 \dots \nu_{\alpha}} \quad (\text{A.19})$$

APÊNDICE B

Função delta de Dirac com variáveis de Grassmann

Nesta secção procura-se definir no espaço de Grassmann uma função análoga a delta de Dirac do espaço convencional.

Define-se a transformada de Fourier, para as variáveis de Grassmann da seguinte forma.

$$\mathcal{G}(\eta) \hat{=} (-1)^{-N} \int \mathcal{F}(\xi') \cdot e^{\sum_{\alpha} \xi'_{\alpha} \eta_{\alpha}} \cdot d\xi'_1 \dots d\xi'_N \quad (\text{B.1})$$

cuja inversa pode ser calculada usando,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi) &= \int \mathcal{G}(\eta) \cdot e^{\sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \eta_{\alpha}} d\eta_1 \dots d\eta_N \\ &= (-1)^{-N} \iint \mathcal{F}(\xi') \cdot e^{\sum_{\alpha} (\xi'_{\alpha} - \xi_{\alpha}) \eta_{\alpha}} d\xi'_1 \dots d\xi'_N d\eta_1 \dots d\eta_N \\ &= \int \mathcal{F}(\xi') \cdot \left[\int e^{\sum_{\alpha} (\xi'_{\alpha} - \xi_{\alpha}) \eta_{\alpha}} d\eta_1 \dots d\eta_N \right] d\xi_1 \dots d\xi_N \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Uma das condições para que a igualdade acima seja satisfeita é que a integral entre colchete, deve ser uma função do tipo delta de Dirac, isto é,

$$\delta(\xi'_{\alpha} - \xi_{\alpha}) \hat{=} \int e^{\sum_{\alpha} (\xi'_{\alpha} - \xi_{\alpha}) \eta_{\alpha}} d\eta_1 \dots d\eta_N$$

$$\delta(\xi'_\alpha - \xi_\alpha) \hat{=} e^{(\xi'_1 - \xi_1)} \dots e^{(\xi'_N - \xi_N)} d\eta_1 \dots d\eta_N$$

$$\hat{=} \delta(\xi'_1 - \xi_1) \dots \delta(\xi'_N - \xi_N) \quad (\text{B.3})$$

A qual é análoga a função delta de Dirac nas variáveis número-c. É interessante ressaltar que esta definição, difere do caso convencional, por um fator i na exponencial.

- Propriedades da nova função delta

$$\text{a) } \int \delta(\xi - \theta) \cdot d\xi = 1$$

Prova: Seja, uma variável anticomutante, então,

$$\begin{aligned} \int \delta(\xi - \theta) d\xi &= \iint e^{(\xi - \theta)\eta} d\eta d\xi \\ &= \iint [1 + (\xi - \theta)\eta] d\eta d\xi \\ &= \int (\xi - \theta) d\xi = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{b) } \int \mathcal{F}(\xi) \cdot \delta(\xi - \theta) \cdot d\xi = \mathcal{F}(\theta)$$

Prova: Seja $\mathcal{F}(\xi) = \alpha + \beta\xi$, sendo α e β números complexos. Então,

$$\begin{aligned} \int \mathcal{F}(\xi) \cdot \delta(\xi - \theta) \cdot d\xi &= \int (\alpha + \beta\xi) \cdot \int e^{(\xi - \theta)\eta} d\eta d\xi \\ &= \iint (\alpha + \beta\xi) \cdot [1 + (\xi - \theta)\eta] d\eta d\xi \end{aligned}$$

$$= \alpha + \beta \theta = \mathcal{F}(\theta) \quad (\text{B.5})$$

$$\text{C) } \int \mathcal{F}(\xi) \cdot \vec{\delta}'(\xi - \theta) d\xi = \vec{\mathcal{F}}'(\theta)$$

onde temos usado as definições,

$$\frac{\vec{d}}{d\xi} g(\xi) \hat{=} \vec{g}'(\xi) \quad \text{e} \quad g(\xi) \frac{\overleftarrow{d}}{d\xi} \hat{=} \overleftarrow{g}'(\xi) \quad (\text{B.6})$$

Prova: seja

$$\int \mathcal{F}(\xi) \cdot \left(\frac{\vec{\delta}}{\partial \xi_\alpha} g(\xi) \right) \cdot d\xi_1 \dots d\xi_N = \int (\mathcal{F}(\xi) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\partial \xi}) g(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_N \quad (\text{B.7})$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \mathcal{F}(\xi) \cdot \vec{\delta}'(\xi - \theta) \cdot d\xi &= \int \mathcal{F}(\xi) \cdot \left(\frac{\vec{\delta}}{\partial \xi} \delta(\xi - \theta) \right) d\xi \\ &= \int \left(\mathcal{F}(\xi) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\partial \xi} \right) \cdot \delta(\xi - \theta) \cdot d\xi \\ &= \int g(\xi) \cdot \delta(\xi - \theta) \cdot d\xi \\ &= g(\theta) = \vec{\mathcal{F}}'(\theta) \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) - P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics (The Claredon Press, Osford, 1958)
- (2) - R.P.Feynman and A.R.Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw - Hill, New York, 1965)
- (3) - R.P.Feynman, Rev. Modern Phys. 20 (1948) 367
- (4) - B.S. De Witt, Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 377
- (5) - K.S. Cheng, J. Math Phys. 13 (1972) 17 23
- (6) - C.S. Hsue, J. Math.Phys. 16 (1975) 2326
- (7) - J. Schwinger, Phys. Rev. 82 (1951) 914
- (8) - J.L. Martin, Proc. Roy. Soc. A 251 (1959) 543; A 251 (1959) 536.
- (9) - R. Casalbuoni, Il Nuovo Cimento 33A (1976) 115, 33A (1976) 389.
- (10) - R. Casalbuoni, Phys. Letters 62B (1976) 49.
- (11) - F.A. Berezin and M.S.Marinov, Ann. of Phys. 104 (1977) 336.
- (12) - L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vecchia and P.Howe, Phys. Letters 64B (1976) 435.
- (13) - J.R. Klauder, Ann. Phys. 11 (1960) 123
- (14) - F.A.Berezin and M.S.Marinov, JETP Letters 21 (1975) 321 .

- (15) - A. Barducci, R. Casalbuoni and L. Lusanna, Nuovo Cimento 357 (1976) 377; Nuclear Phys. 124B (1977) 571
- (16) - L. Brink, P. Di Vecchia and P. Howe, Nucl. Phys. 118B (1977) 76.
- (17) - A. Barducci, R. Casalbuoni and L. Lusanna, Nucl. Phys. 124B (1977) 93
- (18) - A. P. Balachandran, P. Solomonson, B.S. Skagerstam and J.O. Winnberg, Classical description of particles interacting with non-Abelian gauge fields, Göteborg preprint 76 (1976) 35.
- (19) - F. Bordini and R. Casalbuoni, Phys. Letters 16 (1980) 308.
- (20) - H.M. Nussenzveig. "Integrais de Trajetória". Curso da I Escola de Verão de Partículas e Campos. (1981) São Paulo
- (21) - A. Barducci, R. Casalbuoni and L. Lusanna: "A Possible Interpretation of Theories Involving Grassmann Variables", Florence Preprint (1977).
- (22) - F.M. de C. Filho. "Transformações infinitesimais e condições de invariância de sistemas Pseudo-clássicos e Super campos" (1981) (Tese de Mestrado apresentada no Dep. de Física - UnB - Brasília).
- (23) - W.H. Greub, "Linear Algebra", Springer-Verlag, Berlin (1967)
- (24) - A. Barducci, et alii, Phys. Letters B, 67 (1977) 344.
- (25) - A. Barducci, F. Bordini and Casalbuoni, Nuovo Cimento, 64B (1981) 287.

- (26) - P.T. Matheus and A. Salam, Nuovo Cimento 2 (1955) 483.
- (27) - C. Garrod, Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 483.
- (28) - F.A. Berezin, "The Method of Second Quantization", Academic Press, London (1966).